



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Thème

Problème inverse de terme source pour une équation de diffusion fractionnaire

Présentée par :
M^{elle} KAKA Amina

Soutenu publiquement le : 01/07/2019.

Devant le jury composé de :

Président :	<i>M^r GAGUI Bachir</i>	M.C.A,	Université de M'sila
Encadreur :	<i>M^r NOUIRI Brahim</i>	M.C.A,	Université de M'sila
Co-Encadreur :	<i>M^r MIHOUBI Farid</i>	M.A.A,	Université de M'sila
Examineur :	<i>M^{me} DJERIOUI Khayra</i>	M.A.A,	Université de M'sila

Remerciements

AU NOM D'ALLAH LE CLÉMENT ET LE MISÉRICORDIEUX

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout Puissant qui m'a donné le courage et la persévérance pour la réalisation de ce mode de mémoire.

Je remercie profondément Monsieur *NOUIRI Brahim* mon encadreur, qui m'a beaucoup aidé pour terminer ce travail malgré ses nombreuses charges, il m'a guidé durant mon recherche, et sans oublier ses précieux conseils. mes remerciements vont aussi aux Monsieur *MIHOUBI Farid* mon Co-encadreur.

Je voudrais également remercier mon collègue *SAOUDI Dhiya Eddine Aymen* de son aide pour compléter cette mémoire,

De tous mon cœur je remercie mes parents, et mes prières que Dieu les protège et les accorde santé et longue vie.

Enfi, j'adresse un grand remerciement à mes sœurs, mes frères et tout ma famille, qui m'ont donné beaucoup de soutien constant et d'encouragement.

Amina

Dédicaces

Je dédie ce modeste mémoire

À mes très chers parents.

À mes chères sœurs : Chaima et Meryem.

À mes frères : Mohammed, Mour Eddine, Billel, Chams Eddine et choail.

À tout les membres de ma famille

À mes amis.

À tous qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver à ce niveau d'étude

À tout les gents qui m'ont aimé.

Résumé

ملخص: في هذه المذكرة ، درسنا مسألة عكسية لتحديد معامل متعلق بالوقت في معادلة الانتشار الكسرية مع شروط حدية مختلطة ومتجانسة و شرط إضافي على شكل تكامل. لقد أثبتنا وجود الحل ووحدانيته وكذلك الارتباط المستمر بالنسبة للمعطيات وذلك باستخدام طريقة فورييه ومعادلة تكاملية لفولتيرا. اقترحنا خوارزمية انعكاس تستند إلى مخطط ضمني لحل هذه المسألة العكسية عدديا. أخيرًا ، قدمنا أمثلة عددية للتحقق من هذه الخوارزمية.

كلمات مفتاحية: مسألة عكسية، طريقة فورييه، معادلة الانتشار الكسرية، معادلة تكاملية لفولتيرا، مخطط ضمني.

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour déterminer un coefficient de terme source dépend de temps dans une équation de diffusion fractionnaire avec des conditions aux limites mixtes homogènes et une condition de type intégrale. Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que la dépendance continue par rapport aux données, en utilisant la méthode de Fourier et l'équation intégrale de Volterra. Ensuite, nous avons proposé un algorithme d'inversion basé sur un schéma implicite pour résoudre numériquement ce problème inverse. Finalement, nous avons présenté des exemples numériques pour valider cet algorithme.

Mots-Clés : Problème inverse, Méthode de Fourier, Équation de diffusion fractionnaire, Équation intégrale de Volterra, Schéma implicite.

In this memoir, we studied an inverse problem to determine a time dependent source term coefficient in a fractional diffusion equation with homogeneous mixed boundary conditions and an integral type condition. We have demonstrated the existence and uniqueness of the solution, as well as the continuous dependence on the data, using the Fourier method and the integral Volterra equation. Then, we proposed an inversion algorithm based on an implicit scheme to solve numerically this inverse problem. Finally, we presented numerical examples to validate this algorithm.

Keywords : Inverse problem, Fourier method, Fractional diffusion equation, Integral equation of Volterra, Implicit scheme.

Table des matières

1	Rappel sur des outils mathématiques	7
1.1	Fonctions Spéciales	8
1.1.1	Fonction Gamma	8
1.1.2	Fonction Bêta	9
1.2	Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	10
1.3	Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	12
1.4	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	14
1.5	Généralités sur les matrices	15
1.6	Les normes vectorielles et matricielles	16
1.6.1	Normes Vectorielles	16
1.6.2	Normes matricielles	17
1.7	Schéma de différences finies	18
1.7.1	Stabilité et convergence	18
1.8	Transformation de Laplace	19
1.9	Fonction Mittag-Leffler	20
1.10	Equations intégrales de Volterra	21
1.10.1	Equations intégrales linéaire de Volterra	21
1.10.2	Equations intégrales non-linéaire de Volterra	21
1.10.3	Méthode de Trapèze	21
2	Étude théorique	23
2.1	Position du problème	24
2.2	Solution analytique	24
2.3	Existence et unicité	32
2.4	Dépendance continu de la solution par rapport aux données	33
3	Étude numérique	35
3.1	Approximation numérique	36
3.1.1	Schéma des différences finies	39
3.1.2	Système matricielle	40
3.1.3	Stabilité et convergence du schéma implicite	42
3.2	Algorithmes	48
3.3	Application numérique	48

Table des figures

3.1	la solution exacte et la solution approche de $u(x, t)$	49
3.2	la solution exacte et la solution approche de $r(t)$	50

Introduction générale

Les phénomènes de diffusion anormale (sous-diffusion et super-diffusion) présentent de nombreux aspects différents des processus de diffusion classiques. Les équations de diffusion fractionnaire en temps sont couramment utilisées pour décrire un tel processus de diffusion anormal. Ce type d'équations est obtenu en remplaçant la dérivée temporelle première par une dérivée fractionnaire dans le temps. Les problèmes directs posés par les équations de diffusion fractionnaire, telles que les problèmes de valeurs initiales ou aux limites, ont été étudiés de manière approfondie dans [28, 20, 22, 27]. Contrairement au problème direct, l'analyse mathématique du problème inverse pour l'équation de diffusion fractionnaire n'est pas étudiée de manière satisfaisante. Les premiers résultats mathématiques du problème inverse de la recherche du coefficient de diffusion pour une équation de diffusion fractionnaire sont obtenus dans [4]. Dans cet article, le théorème de l'unicité est prouvé en utilisant un développement en termes de fonctions propres du problème de Sturm-Liouville adapté à la théorie de Gelfand-Levitan. Un résultat similaire de développement en fonctions propres et la transformation de Laplace est utilisé dans la détermination du terme source dépendant de l'espace dans une équation de diffusion fractionnaire dans [32]. Les articles [18] and [30] étudient les problèmes inverses liés à la détermination de termes sources dépendants de l'espace et du temps, respectivement, dans l'équation de diffusion fractionnaire dans le temps en utilisant le développement en fonctions propres du problème spectral non auto-adjoint par la méthode de Fourier.

Dans ce mémoire, nous avons considéré l'équation de diffusion fractionnaire suivant :

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = u_{xx}(x, t) + r(t) f(x, t), \quad (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

et les conditions aux limites mixtes homogènes

$$u(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

où ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$ définie par :

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} ds, \quad (4)$$

$\varphi(x)$ et $f(x, t)$ sont des fonctions données, $D_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$.

Si la fonction $r(t)$ est connue, le problème de la recherche de $u(x, t)$ à partir de (1)-(3) est appelé le problème direct. Cependant, le problème ici est que le coefficient de source $r(t)$ est

inconnu, ce qui doit être déterminé par la condition énergétique (intégrale). où $E(t)$ est une fonction donnée. Ce problème s'appelle le problème inverse de terme source.

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

Ce problème inverse (1)-(5) peut être modélisé la température de chauffage par micro-ondes utilisé dans diverses applications industrielles. L'énergie externe est fournie à une cible à un niveau contrôlé par le équipement générant des micro-ondes. Cependant, la constante diélectrique du matériau cible varie dans le temps et dans l'espace, ce qui entraîne une conversion spatialement hétérogène de l'énergie électromagnétique en chaleur. Ceci peut correspondre au terme source $r(t)f(x, t)$ en (1), où $r(t)$ est proportionnel à la puissance de la source d'énergie externe et $f(x, t)$ est taux de conversion local de l'énergie des micro-ondes. Si $u(x, t)$ indique la concentration d'énergie absorbée dans cet exemple, son intégrale sur tout le volume de matériau déterminant la dépendance temporelle de l'énergie absorbée. Le problème inverse de terme source (1)-(5) pour un tel modèle donne une idée de la manière dont le contenu énergétique total pourrait être contrôlé de manière externe.

La condition intégrale (5) est naturelle et peut être utilisée comme information supplémentaire dans la détermination du coefficient $r(t)$ dans le terme source. En prenant le dérivé ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha$ dans la condition (5), l'intégration sur $[0, 1]$ de l'équation (1) et les conditions aux limites (3), on obtient :

$$r(t) = \frac{{}^C\mathcal{D}_t^\alpha E(t) - u_x(0, t)}{\int_0^1 f(x, t) dx} \quad (6)$$

Le problème inverse de trouver $r(t)$ dans l'équation de diffusion classique a déjà été étudié dans [23, 13], en utilisant le développement en termes des fonctions propres d'un problème spectral auxiliaire basé sur la méthode de Fourier, et pour l'équation de diffusion fractionnaire au sens de Riemann-Liouville dans [16]. Notre objectif dans ce mémoire est de inspirer cette méthode pour le cas d'une dérivée fractionnaire au sens de Caputo avec des conditions aux limites mixtes homogènes.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de base concernant le calcul fractionnaire, les équations intégrales de Volterra, la transformation de Laplace et la fonction de Mittag-Leffler. De plus, nous avons donné un rappel sur la méthode des différences finis et l'intégration numérique.

Dans le deuxième chapitre, nous avons calculé la solution par la méthode de Fourier. Ensuite, l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse (1)-(5) sont prouvées en utilisant les équations intégrales de type Volterra, ainsi que la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté un schéma aux différences finis implicite pour déterminer numériquement la solution $u(x, t)$ du problème direct. Nous avons montré que cet schéma est stable et converge. Ensuite, nous avons proposé un algorithme d'inversion pour la coefficient $r(t)$ du problème inverse (1)-(5). Des exemples numériques sont illustrés pour valider cet algorithme d'inversion.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

RAPPEL SUR DES OUTILS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions de base concernant le calcul fractionnaire, les équations intégrales de Volterra, la transformation de Laplace et la fonction de Mittag-Leffler. De plus, nous avons donné un rappel sur la méthode des différences finies et l'intégration numérique.

1.1 Fonctions Spéciales

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1. (voir[25]) On appelle fonction Gamma, la fonction définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

Propriétés 1.1. Nous avons les propriétés suivantes

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
2. $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(-m) = \pm\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma(0) = \infty$
4. Si $n \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Exemple 1.1. Soit $\alpha = \frac{1}{2}$ pour calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$ On utilise un changement de variable on pose que $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale posons

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Prenons

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)^2} dx \end{aligned}$$

Le calcul est plus simple à réaliser qu'on effectue les coordonnées polaires

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r e^{(-r^2)} dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \\ A &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Lemme 1.1. *la fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* , (resp. holomorphe sur le demi plan $x \in \mathbb{C}$, $Re(x) > 0$) et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^* (\text{resp. } x \in \mathbb{C}, Re(x) > 0); \Gamma^k(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dx.$$

Corollaire 1.1. *La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entiers par la formule*

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}, \quad 0 \leq x+n \leq 1.$$

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2. (voir[25]) La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes p et q par

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad Re(p) > 0, \quad Re(q) > 0.$$

Proposition 1.1. *La relation entre la fonction Gamma et Bêta donnée par*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q \in \mathbb{C} \text{ avec } Re(p) > 0 \text{ et } Re(q) > 0.$$

Démonstration. Soit, $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y} y^{q-1} dy \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1} dx dy. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} y = u - x \\ x = ut \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy = du \Rightarrow dx dy = dx du \\ dx = u dt \end{cases}$$

De même que le domaine D' correspondante à D dans les cordonnées u, x est

$$D' = \{(u, x)/u \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 e^{-u} (u-x)^{q-1} dx du \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\int_0^1 (tu)^{p-1} (u-tu)^{q-1} u dt \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 t^{p-1} u^{p-1} u^{q-1} (1-t)^{q-1} u \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{p+q-1} du \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

□

Exemple 1.2. Calculons $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Propriétés 1.2. 1. $B(p, q) = B(q, p)$, (symétrique).

2. $B(p, 1) = \frac{1}{p}$.

1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et $f \in L^1([a, b])$ fonction intégrable sur Ω . Nous avons

$$I_a^1 f(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

La primitive seconde de f définit comme suite

$$I_a^2 f(t) = \int_a^t \left(\int_a^u f(x) dx \right) du,$$

Permutant l'ordre d'intégration, de plus d'après le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} I_a^2 f(t) &= \int_a^t \left(\int_x^t du \right) f(x) dx, \\ I_a^2 f(t) &= \int_a^t (t-x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Le n^{ieme} itération l'opérateur I peut s'écrire

$$I_a^{(n)} = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-n}} dx.$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et d'après la propriété de Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, nous avons

$$I_a^{(n)} = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-n}} dx.$$

Définition 1.3. (voir[17][29]) Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω . Les intégrales

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx, \quad t > a, \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (1.1)$$

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx, \quad t < b, \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (1.2)$$

sont appelés les intégrales fractionnaires à gauche (à droite) de **Riemann-Liouville** d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) respectivement.

Exemple 1.3. Soit $f(x) = (t-a)^\beta$. On

$$I_{a^+}^{(\alpha)} (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dx.$$

Avec le changement de variable $x = a + (t-a)z$, nous avons

$$\begin{cases} x = a \Leftrightarrow z = 0, \\ x = t \Leftrightarrow z = 1, \\ dx = (t-a)dz. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{(\alpha)} (t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a - (t-a)z)^{\alpha-1} (a + (t-a)z - a)^\beta (t-a) dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-1} (1-z)^{\alpha-1} (t-a)^\beta z^\beta (t-a) dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 z^\beta (1-z)^{\alpha-1} dz (t-a)^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (t-a)^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} I_{a^+}^1 (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (t-a)^{\beta+1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} (t-a)^{\beta+1} \end{aligned}$$

Remarque 1.1. L'intégrale d'une fonction constante au sens Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par

$$I_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} (t-a)^\alpha \quad \text{et} \quad I_{b^-}^\alpha f(t) = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} (b-t)^\alpha, \quad f(t) = C \in \mathbb{C}.$$

Théorème 1.1. (voir[17]) Soit $f \in C([a, b])$ et $\alpha > 0$. Les intégrales fractionnaires de **Riemann-Liouville** (1.1) et (1.2) possède les propriétés suivantes

1. $I_{a^+}^\alpha \left[I_{a^+}^\beta f(t) \right] = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t)$.
2. $I_{b^-}^\alpha \left[I_{b^-}^\beta f(t) \right] = I_{b^-}^{\alpha+\beta} f(t)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} I^\beta(f(x)) dx, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\beta-1} f(s) ds \right) dx, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^x (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} f(s) ds dx, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) ds \int_s^t (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} dx,
 \end{aligned}$$

Par le changement de variable

$$\begin{cases} x = s + (t-s)\tau \\ dx = (t-s)d\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s \Rightarrow \tau = 0 \\ x = t \Rightarrow \tau = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) ds \int_0^1 (t-s - (t-s)\tau)^{\alpha-1} ((t-s)\tau)^{\beta-1} (t-s) d\tau, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) ds \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} \tau^{\beta-1} (1-s) d\tau, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) ds \int_0^1 (t-s)^{\alpha+\beta-1} \tau^{\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \int_0^1 \tau^{\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
 &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds, \\
 &= I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t).
 \end{aligned}$$

□

1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4. (voir[17, page 70]) Soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville $\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f$ et $\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$

($Re(\alpha) > 0$) sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n (I_{a^+}^{n-\alpha} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(x)dx}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad t > a. \end{aligned} \quad (1.3)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) &= \left(\frac{-d}{dt} \right)^n (I_{b^-}^{n-\alpha} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{-d}{dt} \right)^n \int_t^b \frac{f(x)dx}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad t < b. \end{aligned} \quad (1.4)$$

respectivement, où $[Re(\alpha)]$ est partie entière de $Re(\alpha)$.

Remarque 1.2. 1. pour $\alpha = 0, n = 1$. on a $\mathcal{D}_{a^+}^0 f(t) = \frac{d}{dt} (I_{a^+}^1 f) = f(t)$

2. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^n f(t) = \mathcal{D}_+^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ \mathcal{D}_{b^-}^n f(t) = \mathcal{D}_-^n f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}$$

Propriétés 1.3. (voir[17, page 71]) Pour $\alpha \geq 0, \beta > 0$, on a

1. $(\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^\beta)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha}$
2. $(\mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-t)^\beta)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha}$

Démonstration. On calcul la dérivée fractionnaire d'ordre α de la fonction $f = (t-a)^\beta$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{d^n}{dt^n} [I^{n-\alpha} (t-a)^\beta] \\ \mathcal{D}_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (t-a)^{n-\alpha+\beta} \right] \end{aligned}$$

Dérive n fois, on obtient

$$\mathcal{D}_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}$$

Comme cas particulier $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (t-a)^{\beta-1} \\ \mathcal{D}_a (t-a)^\beta &= \beta (t-a)^{\beta-1} \end{aligned}$$

□

Remarques 1.1. Quelques remarques pour ces dérivées

1. Tout ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^m f(t) = f^{(m)}(t), \\ \mathcal{D}_{b^-}^m f(t) = (-1)^m f^{(m)}(t). \end{cases}$$

2. Si $0 < \alpha < 1$, alors $n = [\alpha] + 1 = 1$. Donc, (1.3) et (1.4) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(t)dt}{(t-x)^\alpha}, \quad t > a \\ \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}, \quad t < b \end{aligned}$$

3. Si $\beta = 1$, et $0 < Re(\alpha) < 1$, alors la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction en général n'est pas nulle :

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{b^-}^\alpha 1 = \frac{(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

4. Pour tout $j = 1, 2, \dots, [Re(\alpha)] + 1$ avec $Re(\alpha) \geq 0$, nous avons

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\alpha-j} = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\alpha-j} = 0.$$

1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.5. (voir[17]) Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [Re(\alpha)] + 1$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1[a, b]$. Les dérivées fractionnaires d'ordre α de f au sens de Caputo sont définies

$${}^c\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad (1.5)$$

et

$${}^c\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad (1.6)$$

Proposition 1.2. Les relation entre les dérivées au sens de Caputo (1.5),(1.6) et les dérivées au sens de Riemann-Liouville (1.3),(1.4) sont données par

$${}^c\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right], \quad (1.7)$$

et

$${}^c\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right]. \quad (1.8)$$

1.5 Généralités sur les matrices

Définition 1.6. (voir[3]) Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Une matrice de type (m, n) sur \mathbb{K} est un tableau de scalaires (réels ou complexes) à m lignes et n colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nous utilisons les abréviations suivantes, $A = (a_{ij})$ avec $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$, et $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices (m, n) sur \mathbb{K} .

Définition 1.7. (voir[3]) Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, la **transposée** de A noté A^T , est la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ définie par

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, m,$$

si $A^T = A$ on dit que A est **symétrique**.

Soit A une matrice carrée, $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

Définition 1.8. (voir[21]) On dit que A est **invertible** s'il existe une matrice B de taille n telle que

$$AB = BA = I_n,$$

la matrice B est appelée **inverse** de A et noté A^{-1} .

Définition 1.9. (voir[21]) On dit que A est **tridiagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tout i, j tels que $|i - j| \geq 2$, i.e., si les seuls coefficients non nuls sont les coefficients diagonaux, ceux juste au dessus de la diagonale, et ceux juste en-dessous de la diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ \mathbf{0} & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 1.10. (voir[3]) On dit que A est à **diagonale strictement dominante par ligne** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \text{ avec } 1 \leq i \leq n.$$

Théorème 1.2. (voir[3]) Une matrice à **diagonale strictement dominante par ligne** est **invertible**

Démonstration. On doit montrer que

$$AX = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ et k un indice tel que $|x_k| = \|x\|_\infty$. Alors,

$$\begin{aligned}
 AX = 0 &\Rightarrow a_{kk} \cdot x_k = - \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj} \cdot x_j \\
 &\Rightarrow |a_{kk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \cdot |x_j| \\
 &\Rightarrow |a_{kk}| \cdot \|x_k\|_\infty \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \cdot \|X\|_\infty \\
 &\Rightarrow \underbrace{\left(|a_{kk}| - \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \right)}_{>0} \cdot \|X\|_\infty \leq 0 \\
 &\Rightarrow \|X\|_\infty \leq 0 \\
 &\Rightarrow X = 0.
 \end{aligned}$$

□

Définition 1.11. (voir[3]) Le **rayon spectral** de A est défini par

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

où λ_i sont les valeurs de la matrice A .

1.6 Les normes vectorielles et matricielles

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

1.6.1 Normes Vectorielles

Définition 1.12. (voir[21]) Une norme sur \mathbb{K}^n est une application $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

1. $\|x\| = 0_{\mathbb{K}}$ implique $x = 0_n$, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$ (inégalité triangulaire).

On définit p -norme, pour $1 \leq p \leq +\infty$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les normes les plus usuelles sont

1. La norme :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

2. La norme (norme euclidienne) :

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. La norme (norme du sup) :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1.6.2 Normes matricielles

à partir de normes vectorielles, on définit les trois normes matricielles subordonnées $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

où $p = 1, 2$, ou ∞ .

Proposition 1.3. (voir[3]) Pour chacune de ces normes, on a pour toutes A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

et

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|,$$

où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque 1.3. (voir[3]) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors,

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

Théorème 1.3. (voir[5, page 18]) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

1.7 Schéma de différences finies

Définition 1.13. Un maillage est un ensemble de points isolés (appelés) situés dans le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles. On appelle pas de maillage la distance entre deux nœuds voisins.

Définition 1.14. (voir[19]) Soit $u(x)$ représente une fonction d'une variable, les schémas de différences finies sont obtenus grâce aux formules de Taylor.

Formules de Taylor d'ordre 01

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + O(h). \quad (1.9)$$

Formules de Taylor d'ordre 02

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + O(h^2). \quad (1.10)$$

En un point $x \in [l, L]$ et pour une valeur h de pas de discrétisation donné par $h = \frac{L-l}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, la formule(1.9) nous permet d'approximer $u'(x)$ comme suite

approximation avant

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h), \quad (1.11)$$

approximation arrière

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h), \quad (1.12)$$

approximation centré

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h), \quad (1.13)$$

et se basant sur (1.10) et (1.13) nous obtenons

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

1.7.1 Stabilité et convergence

Un certain nombre de notions est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les deux principales sont **la stabilité** et **la convergence**.

Définition 1.15. (voir[9])Un schéma aux différences finies est dit **stable** pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de pas de maillage, telle que

$$\|u^n\|_\infty \leq C \|u^0\|_\infty, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 .

Définition 1.16. (voir[26]) (**Erreur de troncature**) on appelle erreur de troncature la quantité obtenue remplaçant l'inconnue par solution exacte dans le schéma numérique, que nous désignons par R_i .

Proposition 1.4. (voir[19]) Soit u_i l'approximation de la solution exacte $u(x_i)$, il est naturel d'utiliser les erreur ponctuelles $u_i - u(x_i)$. Si on pose que \hat{U} le vecteur des valeur exactes et U le vecteur des valeurs discrètes, alors le vecteur d'erreur E défini par

$$E = U - \hat{U}.$$

Définition 1.17. (voir[19]) Une méthode est dite convergente si

$$\|E\| \rightarrow 0 \text{ lors que } h \rightarrow 0.$$

1.8 Transformation de Laplace

Définition 1.18. (voir[31, page 5]) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable sur \mathbb{R} . la transformée de Laplace est définie par :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt, \quad (1.14)$$

où s est la variable de transformation.

– La transformée Laplace **inverse** est réalisée selon la formule **Fourier Mellin**

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^*(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s) e^{st} dt, \quad t > 0, \quad (1.15)$$

où c est un nombre fixe.

Propriétés 1.4. (voir[31, page 7]) Nous avons les propriétés suivantes :

1. La transformée de Laplace pour l'intégrale fractionnelle de Riemann-Liouville(1.1) :

$$\mathcal{L}\{f^\alpha(t)\} = \frac{1}{s^\alpha} f^*(s).$$

2. La transformée de Laplace pour la dérivée de Riemann-Liouville(1.3) :

$$\mathcal{L}\{\mathcal{D}_{R.L}^\alpha f(t)\} = s^\alpha f^*(s) - \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{D}^k I^{m-\alpha} f(0^+) s^{m-1-k} \quad \text{où } m-1 < \alpha < m.$$

3. La transformée de Laplace pour la dérivée de Caputo(1.5) :

$$\mathcal{L}\{{}^c\mathcal{D}^\alpha f(t)\} = s^\alpha - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} \quad \text{où } m-1 < \alpha < m. \quad (1.16)$$

– Le théorème de convolution, Souvent utilisé pour l'inversion de la transformée Laplace est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{f^*(s)g^*(s)\} &= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.9 Fonction Mittag-Leffler

Définition 1.19. (voir[31, page 24]) La fonction Mittag-Leffer est définie par :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}; \quad \alpha > 0, \quad z > 0.$$

la fonction généralisée Mittag-Leffer avec deux paramètres α et β est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}; \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

– La relation entre fonction Mittag-Leffler et la fonction Gamma

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z).$$

– Le rôle essentiel de la fonction **Mittag-Leffler** est trouvé dans le calcul de la **transformation inverse de Laplace** suivant

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} + b} \right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-bt^{\alpha}). \quad (1.18)$$

Lemme 1.2. (voir[2]) pour $0 < \alpha < 1$ la fonction de type Mittag-Leffler $E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha})$ satisfait

$$0 \leq E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha}) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad t \in [0, \infty), \quad \lambda \geq 0.$$

Lemme 1.3. (voir[25][29]) Pour $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\gamma(t - \tau)^{\alpha}) d\tau = \frac{1}{\gamma} (1 - E_{\alpha}(-\gamma(t - t_0)^{\alpha})).$$

Propriétés 1.5. (voir[31, page 27]) Nous distinguons les trois cas suivants :

1. Pour $\beta = 1$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + b} \right\} = E_{\alpha}(-bt^{\alpha}) \quad (1.19)$$

2. Pour $\beta = 2$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha} + b} \right\} = t E_{\alpha,2}(-bt^{\alpha}) \quad (1.20)$$

3. Pour $\beta = \alpha$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha} + b} \right\} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-bt^{\alpha}). \quad (1.21)$$

1.10 Equations intégrales de Volterra

1.10.1 Equations intégrales linéaire de Volterra

Définition 1.20. (voir[10])

1. On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.22)$$

2. On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.23)$$

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

1.10.2 Equations intégrales non-linéaire de Volterra

Définition 1.21. (voir[10])

1. On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t))dt \quad (1.24)$$

2. On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t))dt \quad (1.25)$$

On prend $\lambda = 1$

1.10.3 Méthode de Trapèze

Soit l'équation intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad (1.26)$$

Notre objectif est d'approximer la solution φ^* de cette équation. Pour ce faire, nous commençons par partitionner l'intervalle en petits intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, c'est-à-dire nous choisissons des points $x_i, i = 0, 1, \dots, N$ (des Nœuds) tels que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < x_n = b$$

supposons que ce système est équidistant, i.e. $x_j = a + jh$ avec $j = 0, 1, \dots, n$ où h est le pas de la discrétisation. Pour ce faire en exigeant que l'équation (1.26) ait lieu uniquement en ces nœud, l'équation (1.26) devient

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \int_0^{x_j} k(x_j, t)\varphi(t)dt$$

la méthode de Trapèze, nous amène à une seconde discrétisation par rapport à la variable d'intégration t . On pose $t = (x_i)_{0 \leq i \leq j}$, il vient

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \sum_{i=0}^{j-1} \int_0^{x_{j+1}} k(x_j, t) \varphi(t) dt$$

alors

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{j-1} [k(x_j, t_{i+1}) \varphi(t_{i+1}) + k(x_j, t_i) \varphi(t_i)]$$

donc

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \frac{h}{2} k(x_j, t) \varphi(t) + h \sum_{i=1}^{j-1} k(x_j, t_i) \varphi(t_i) \quad (1.27)$$

si $j = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \varphi(a) = g(x_0) \\ &\Rightarrow \varphi(a) = g(a) \Rightarrow \varphi(0) = g(0). \end{aligned}$$

On notons $\varphi_j = \varphi(x_j)$, $g_j = g(x_j)$ et $k_{ji} = k(x_j, t_i)$, alors la formule (1.27) devient

$$\varphi_j = g_j + \frac{h}{2} k_{j0} \varphi_0 + \frac{h}{2} k_{jj} \varphi_j + h \sum_{i=1}^{j-1} k_{ji} \varphi_i$$

donc on a, en général

$$\left(1 - \frac{h}{2} k_{jj}\right) \varphi_j = g_j + \frac{h}{2} k_{j0} \varphi_0 + h \sum_{i=1}^{j-1} k_{ji} \varphi_i \quad (1.28)$$

ÉTUDE THÉORIQUE

Dans ce chapitre, nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème inverse de terme source (1)-(4) en utilisant la méthode de Fourier et les équations intégrales de type Volterra, ainsi que un résultat de la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

2.1 Position du problème

On considère le problème dans le domaine $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}$ suivant :

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + r(t)f(x, t), \quad (x, t) \in D_T, 0 < \alpha < 1, \quad (2.1)$$

avec les condition initiales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.2)$$

les conditions aux limites

$$u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

où $T > 0$ et ${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α définie par :

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha \psi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\psi'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.4)$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.5)$$

où $f(x, t), \varphi(x), E(t)$ sont des fonctions données, et $r(t)$ est un terme source .

2.2 Solution analytique

Proposition 2.1. (voir[8][25]) Soient introduit la fonction

$e_\alpha(t, \lambda) = E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ et $e_{\alpha,\alpha}(t, \lambda) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Puis les déclarations suivantes pour la fonction de type Mittag-Leffler $e_\alpha(t, \lambda)$ et $e_{\alpha,\alpha}(t, \lambda)$ retient.

1. pour $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ la fonction $e_\alpha(t, \lambda)$ est fonction décroissante monotone
2. la fonction, $e_\alpha(t, \lambda)$ a les estimations

$$e_\alpha(t, \lambda) \simeq e^{-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha} \quad \text{pour } t \ll 1$$

et

$$e_\alpha(t, \lambda) \simeq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} \quad \text{pour } t \gg 1$$

- 3.

$$E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\beta) < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda(t-\tau)^\alpha) d\tau < \infty,$$

$$e_{\alpha,\alpha}(t, \lambda) \leq \frac{1}{t} \frac{t^\alpha}{1 + \lambda t^\alpha},$$

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha e_\alpha(t, \lambda) = -\lambda e_\alpha(t, \lambda),$$

$$I_{0+}^{1-\alpha}(e_{\alpha,\alpha}(t, \lambda)) = e_\alpha(t, \lambda).$$

Théorème 2.1. (voir[6]) La solution $u \in C[0, T]$ du problème fractionnaire linéaire non homogène

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) + \lambda u(t) = h(t), & t \in [0, T], \quad \lambda > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

où $h \in L^1[0, T]$, est donnée par l'expression intégrale

$$u(t) = u_0 e_\alpha(t, \lambda) + \int_0^t e_{\alpha, \alpha}(t - \tau, \lambda) h(\tau) d\tau.$$

Démonstration. On applique la transformée de Laplace sur l'équation (2.6)

$$\mathcal{L}\{ {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) \} + \lambda \mathcal{L}\{ u(t) \} = \mathcal{L}\{ h(t) \} \quad (2.7)$$

La transformation de Laplace pour la dérivée de Caputo (1.16) d'ordre $0 < \alpha < 1$ sont

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u \}(s) &= s^\alpha \mathcal{L}\{ u \}(s) - s^{\alpha-1} u(0) \\ &= s^\alpha \mathcal{L}\{ u \}(s) - s^{\alpha-1} u_0. \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (2.7) &\Leftrightarrow s^\alpha \mathcal{L}\{ u \}(s) - s^{\alpha-1} u_0 + \lambda \mathcal{L}\{ u \}(s) = \mathcal{L}\{ h \}(s) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}\{ u \}(s) = \frac{s^{\alpha-1} u_0}{s^\alpha + \lambda} + \frac{1}{s^\alpha + \lambda} \mathcal{L}\{ h \}(s) \end{aligned} \quad (2.8)$$

on applique la transformée inverse de Laplace sur l'équation (2.8) on obtient

$$\mathcal{L}^{-1}\{ \mathcal{L}\{ u \}(s) \} = u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^{\alpha-1} u_0}{s^\alpha + \lambda} \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^\alpha + \lambda} \mathcal{L}\{ h \}(s) \right\} \quad (2.9)$$

– D'après l'équation (1.19), on a

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \right\} = E_\alpha(-\lambda t^\alpha) \quad (2.10)$$

– D'après le théorème de convolution (1.17), on obtient

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^\alpha + \lambda} \mathcal{L}\{ h \}(s) \right\} = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda \tau^\alpha) h(t - \tau) d\tau \quad (2.11)$$

on remplaçons les résultats précédents (2.10) et (2.11) on obtient la forme de la fonction u :

$$\begin{aligned} u(t) &= E_\alpha(-\lambda t^\alpha) u_0 + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda \tau^\alpha) h(t - \tau) d\tau, \\ u(t) &= u_0 e_\alpha(t, \lambda) + \int_0^t e_{\alpha, \alpha}(t, \lambda) h(t - \tau) d\tau, \\ u(t) &= u_0 e_\alpha(t, \lambda) + \int_0^t e_{\alpha, \alpha}(t - \tau, \lambda) h(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.1. (voir[29]) Soit $(f_i(t))_{i \geq 0}$ suite de fonction définie sur l'intervalle $]0, T]$. Supposons que les conditions suivantes soient remplies :

- la dérivée fractionale de Caputo ${}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha f(t)$, pour une donnée $\alpha > 0, i \in \mathbb{N}, t \in]0, T]$ exists
- les deux séries $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)$ et $\sum_{i=1}^{\infty} {}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha f_i(t)$ sont convergents uniformément sur l'intervalle $[\epsilon, T]$ pour toute $\epsilon > 0$;

Alors la fonction définie par la série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)$ est α -différentiable est satisfait

$${}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} {}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha f_i(t).$$

Lemme 2.2. (voir[24]) Soit $Q(t, \tau) \in S^v$ et $v < 1$. Alors l'opérateur intégral de Volterra T défini par $(Tr)(t) = \int_0^t Q(t, \tau)r(\tau)d\tau$ mappe $C[0, 1]$ en lui-même et $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est compact.

Lemme 2.3. (voir[24]) Soit $f \in C[0, 1]$ et $Q(t, \tau) \in S^v$ avec $v < 1$. Alors (1.22) est une solution unique $u \in C[0, 1]$ nous aurons aussi besoin de rappeler les résultats sur la version faiblement singulière de l'inégalité de Gronwall.

Lemme 2.4. (voir[7]) Soit $T, \epsilon, M \in \mathbb{R}_+$ et $0 < \alpha < 1$, De plus supposer que $\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. est une fonction continue satisfaisant l'inégalité

$$|\delta(t)| \leq \epsilon + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} |\delta(\tau)| d\tau, \quad \text{avec } v = 1 - \alpha$$

pour tous $t \in [0, T]$, puis

$$|\delta(t)| \leq \epsilon E_\alpha(Mt^\alpha)$$

pour $t \in [0, T]$.

Lemme 2.5. (voir[14]) Si $\psi \in L_2[0, 1]$, alors les estimations

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} |(\psi, X_n)|^2 \leq c_1 \|\psi\|_{L_{[0,1]}^2}^2, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} |(\psi, u_n)|^2 \leq c_2 \|\psi\|_{L_{[0,1]}^2}^2$$

maintenez pour quelques constantes positives c_1 et c_2 , où $(\psi, X_n) = \int_0^1 \psi(x)X_n(x)dx$ et

$(\psi, u_n) = \int_0^1 \psi(x)u_n(x)dx$ désignent les produits internes habituels dans $L_2[0, 1]$.

Notons

$$\Phi_{n_0}^4[0, 1] := \left\{ \psi(x) \in C^4[0, 1]; \psi(0) = \psi'(0), \psi(1) = \psi'(1) = \psi''(1) = \psi'''(1) = 0, \int_0^1 \psi(x)X_{n_0}(x)dx = 0 \right\}.$$

Lemme 2.6. (voir[14]) Si $\psi(x) \in \Phi_{n_0}^4[0, 1]$, ensuite nous avons :

$$\lambda_n^2(\psi, X_n) = (\psi^4, X_n), \quad \lambda_n^2(\psi, u_n) = (\psi^4, u_n), \quad n \geq 0,$$

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} |\lambda_n(\psi, X_n)| \leq c_3 \|\psi\|_{C^4[0,1]}, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} |\lambda_n(\psi, u_n)| \leq c_4 \|\psi\|_{C^4[0,1]},$$

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} |(\psi_n, X_n)| \leq c_5 \|\psi\|_{C^4[0,1]}, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} |(\psi_n, u_n)| \leq c_6 \|\psi\|_{C^4[0,1]},$$

où c_3, c_4, c_5 et c_6 sont des constantes positives.

Pour le problème (2.1) (2.3) les condition au bord sont non locales

$$u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

Nous résolvons l'équation homogène correspondante dans le problème, telle que $r(t)f(x, t)$ est remplacée par 0 avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, la méthode peut être présentée en deux étapes :

1. **La première étape** :séparation des variables, on cherche la solution du problème de la forme

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.13)$$

2. **La deuxième étape** :superposition, où on essaie de trouver une somme de solutions de la forme(2.13) que vérifie la condition aux limites de problème (2.12).

1. Séparation des variables, on cherchons la solution du problème qui est donné par la formule (2.13). On remplaçons (2.13) dans l'équation de problème (2.12), on obtient :

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t) = {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha (X(x)T(t)) = X(x){}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha T(t),$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (X(x)T(t)) = T(t)X^{(2)}(x).$$

Donc, l'équation de problème (2.12) devient :

$$X(x){}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha T(t) - T(t)X^{(2)}(x) = 0 \quad \text{pour tout } 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,$$

ce qui implique que :

$$\frac{{}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha T(t)}{T(t)} - \frac{X^{(2)}(x)}{X(x)} = 0 \Rightarrow \frac{{}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha T(t)}{T(t)} = \frac{X^{(2)}(x)}{X(x)}$$

Nous avons une fonction de la variable x qui est égale à une fonction avec une variable t . Donc, cette fonction est égale à une constante

$$\frac{{}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha T(t)}{T(t)} = \frac{X^{(2)}(x)}{X(x)} = \lambda \quad (2.14)$$

les conditions aux limites de la problème (2.12) devient

$$\begin{cases} u(0, t) = X(0)T(t) = 0 & \Rightarrow X(0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = X'(1)T(t) = 0 & \Rightarrow X'(1) = 0, \text{ pour tout } 0 < t < T. \end{cases}$$

Nous obtenons une équation différentielle linéaire ordinaire par $X(x)$. Une relation différentielle linéaire fractionnaire ordinaire avec la dérivée de Caputo pour $T(t)$.

Cherchons les valeurs propres et les fonctions propres du problème Sturm-Liouville (de équation différentielle linéaire ordinaire par $X(x)$) ce qui est donné par

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X'(1) = 0, \text{ avec } \lambda < 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

on pose $\lambda = -\omega^2$

$$X'' + \omega^2 X(x) = 0$$

en utilisant l'équation caractéristique, il devient

$$r = \pm i\omega$$

Donc, la solution de (2.15) est donnée par

$$X(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x).$$

On a, le problème (2.15) est constitué de l'équation différentielle et des conditions aux limites

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X'(1) = -B\omega \cos(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{2n+1}{2}\pi, \end{cases}$$

Ces conditions aux limites sont dites séparées, car elles portent chacune sur une extrémité de l'intervalle $[0, 1]$.

On trouve que le spectre (les valeurs propres) est

$$\rho = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}, \text{ où } \omega_n = \frac{2n+1}{2}\pi,$$

et des fonctions propres associées à ω_n sont données par

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

alors, la solution du problème est donnée par

$$u(x, t) = B_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

D'où, la somme des solutions est encore une solution de problème.

2. Superposition, maintenant on cherchons la solution du problème non homogène de la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) \quad (2.16)$$

Nous développons $f(x, t)$ comme un série de Fourier par les fonctions propres $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) \quad (2.17)$$

où

$$f_n(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) dx$$

on remplaçant (2.16) et (2.17) en problème, on trouve :

$$\begin{aligned} {}^c\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} \left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) \right] \\ &+ r(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) \end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} {}^c\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} B_n(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) &= - \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) \\ &+ r(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) \end{aligned}$$

on obtient

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} B_n(t) = - \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 B_n(t) + r(t) f_n(t)$$

Puisque $u(x, t)$ satisfait les condition initiale en problème, nous devons avoir :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

on a φ est écrire comme une série de Fourier, avec le coefficient de Fourier $B_n(0)$ qui est donnée par :

$$B_n(0) = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) dx.$$

Donc, $B_n(t)$ est une solution de problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} B_n(t) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 B_n(t) = r(t) f_n(t) \\ B_n(0) = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) dx. \end{cases} \quad (2.18)$$

Théorème 2.2. (voir[15]) Supposons que les conditions suivantes tiennent :

(A1) $\varphi(x) \in \Phi_{n_0}^4[0, 1]$

(A2) $E(t) \in C^1[0, 1]$; $E(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx$.

(A3) $f(x, t) \in C(\bar{D}_T)$; $f(x, t) \in \Phi_{n_0}^4[0, 1]$, $\forall t \in [0, T]$;

alors il existe une solution classique unique du problème inverse dans (2.1) et(2.5) dans D_T .

Démonstration. Pour arbitraire $r(t) \in C[0, T]$, la solution de (2.1)(2.3) peut être écrite sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)$$

où la fonctions $B_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots; n \neq n_0$, doit être déterminée à l'aide de la méthode de Fourier, on peut facilement voir que $B_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots; n \neq n_0$, satisfait le système suivant de nombreuses équations différentielles fractionnaires linéaires :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} B_n(t) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 B_n(t) = r(t)f_n(t) \\ B_n(0) = \varphi_0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Selon (2.6), on peut facilement voir que la solution (2.19) est de la forme

$$B_n(t) = \varphi_0 e_{\alpha}(t, \lambda) + \int_0^t e_{\alpha, \alpha}(t - \tau, \lambda) r(\tau) f_n(\tau) d\tau$$

avec

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) dx, \quad f_n(t) = \int_0^1 f(x, t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) dx.$$

et la solution est donnée formellement

$$u(x, t) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left[\varphi_0 e_{\alpha}(t, \lambda) + \int_0^t e_{\alpha, \alpha}(t - \tau, \lambda) r(\tau) f_n(\tau) d\tau \right] \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right), \quad (2.20)$$

les formules (2.20) et (2.15) donnent une équation intégrale de Volterra du première espèce sur $r(t)$:

$$\int_0^t K(t, \tau) r(\tau) d\tau + F(t) = E(t) \quad (2.21)$$

où

$$K(t, \tau) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left[f_n(\tau) e_{\alpha, \alpha}(t - \tau, \lambda) \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) dx \right) \right]$$

et

$$F(t) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left[\varphi_0 e_{\alpha}(t, \lambda) \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) dx \right) \right]$$

De plus, l'équation (2.21) donne l'équation de Volterra du second espèce en prenant un dérivé fractionnaire ${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha$:

$$\int_0^t {}^c\mathcal{D}_\tau^\alpha K(t, \tau)r(\tau)d\tau + r(t) \lim_{\tau \rightarrow t-0} I_\tau^{\alpha-1} K(t, \tau) + {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha F(t) = {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha E(t) \quad (2.22)$$

En utilisant les propriétés dans la proposition 2.1, il est facile de montrer que

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow t-0} I_\tau^{\alpha-1} K(t, \tau) &= \lim_{\tau \rightarrow t-0} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left[f_n(\tau) e_\alpha(t - \tau, \lambda) \left(\int_0^1 \sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) dx \right) \right] \\ &= \int_0^1 f(x, t) dx, \\ {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha F(t) &= - \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left[\lambda \varphi_0 e_\alpha(t, \lambda) \left(\int_0^1 \sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) dx \right) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

$${}^c\mathcal{D}_\tau^\alpha K(t, \tau) = - \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left[\lambda e_{\alpha, \alpha}(t - \tau, \lambda) f_n(\tau) \left(\int_0^1 \sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) dx \right) \right] \quad (2.24)$$

On obtient l'équation intégrale de Volterra du second espèce par rapport à $r(t)$ dans la forme

$$r(t) = p(t) + \int_0^t Q(t, \tau)r(\tau)d\tau \quad (2.25)$$

avec le terme

$$p(t) = \frac{{}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha E(t) - {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha F(t)}{\int_0^1 f(x, t) dx};$$

et noyau

$$Q(t, \tau) = - \frac{{}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha K(t, \tau)}{\int_0^1 f(x, t) dx}.$$

Selon le lemme 1.2, nous estimons le noyau de (2.25) dans la suite de

$$|Q(t, \tau)| = \frac{|{}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha K(t, \tau)|}{\left| \int_0^1 f(x, t) dx \right|} \leq \frac{C}{(t - \tau)^\lambda}$$

où

$$C = \frac{M_{c4} \max_{t \in [0, T]} \|f(\cdot, t)\|_{c4[0,1]}}{\Gamma(\alpha) \min_{t \in [0, T]} \left| \int_0^1 f(x, t) dx \right|} \text{ avec } M \geq \left| \sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) \right|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1] \text{ et } \lambda = 1 - \alpha.$$

Barce que le noyau $Q(t, \tau)$ appartient à la classe avec S^α , l'équation intégrale Volterra (2.25) est faiblement singulière, alors à une solution unique $r \in C[0, 1]$ conforme au lemme 2.2 et 2.3. \square

2.3 Existence et unicité

(voir[15])Tout d'abord, la solution du problème inverse (2.1)(2.5) est unique. Supposons qu'il y ait deux paires de solutions (r, u) et (a, v) du problème inverse (2.1)(2.5) puis de la forme de la solution (2.21) et (2.25) nous avons

$$u(x, t) - v(x, t) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} [e_{\alpha, \alpha}(t - \tau, \lambda) f_n(\tau) [r(\tau) - a(\tau)] d\tau] \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \quad (2.26)$$

et

$$r(t) - a(t) = \int_0^t Q(t, \tau) [r(\tau) - a(\tau)] d\tau \quad (2.27)$$

puis (2.27) les rendements $r = a$. Après insertion on a $u = v$ Jusqu'ici, nous avons prouvé la caractère unique de la solution du problème inverse car la solution $u(x, t)$ est formellement donné par la dérie frome (2.21), nous devons montrer que la série correspondant à $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ et ${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, \cdot)$ représentent des fonctions continues. Sous les hypothèses (A1) – (A3) et lemme 2.5 pour tout $(x, t) \in \bar{D}_T$ la série correspondant à $u(x, t)$ est délimitée ci-dessus par série

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left[|\varphi_0| + \frac{1}{\lambda_n} \max_{t \in [0, T]} |r(t)| \max_{t \in [0, T]} |f_n(t)| \right] \quad (2.28)$$

la série de majorisation (2.21) est convergente en utilisant le lemme 2.5 et 2.6 , Cela implique que, par le Weierstrass M-test, la série (2.21) est uniformément convergente dans le \bar{D}_T et donc que la solution $u(x, t)$ est continue dans \bar{D}_T . La série de majorisation pour x-dérivée partielle est

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left[|\varphi_0| \sqrt{\lambda_n} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \max_{t \in [0, T]} |r(t)| \max_{t \in [0, T]} |f_n(t)| \right] \quad (2.29)$$

Pour la seconde dérivée partielle par rapport à x

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left[|\varphi_0| \lambda_n + \max_{t \in [0, T]} |r(t)| \max_{t \in [0, T]} |f_n(t)| \right] \quad (2.30)$$

On peut facilement voir que les séries (2.29)-(2.30) sont convergentes en utilisant le lemme 2.5 et 2.6 , Inégalité de Schwarz. C'est pour quoi, par le test de Weierstrass, la série obtenue pour les dérivées x-partiales et la seconde dérivée partielle par rapport à x est uniformément convergente dans \bar{D}_T . Donc leurs sommes $u_x(x, t)$ et $u_{xx}(x, t)$ sont continu en \bar{D}_T . Il reste maintenant à montrer que la dérivée fractionnaire de $u(x, t)$ représente une fonction continue sur D_T . Nous montrerons que pour tout $\epsilon > 0$ et $t \in [\epsilon, T]$ les séries suivantes

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} [{}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha B_n(t)] \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)$$

ce qui correspond à la dérivée fractionnaire de la fonction $u(x, t)$ est uniformément convergent. Avant de rappeler le lemme 2.1, Nous voyons maintenant que l'équation (2.20) donne

$${}^c\mathcal{D}_{0^+}^\alpha B_n(t) = -\lambda_n \varphi_0 e_\alpha(t, \lambda_n) - \lambda_n \int_0^t e_{\alpha, \alpha}(t - \tau, \lambda_n) r(\tau) f_n(\tau) d\tau + r(t) f_n(t).$$

Nous avons les estimations suivante

$$|{}^c\mathcal{D}_{0^+}^\alpha B_n(t)| \leq |\varphi_0| \lambda_n e_\alpha(\epsilon, \lambda_n) + 2 \max_{t \in [0, T]} r(t) \max_{t \in [0, T]} f_n(t)$$

et on obtient une série majorant comme suit

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left[|\varphi_0| \lambda_n e^{-\frac{\lambda_n}{\Gamma(1+\alpha)} \epsilon^\alpha} + 2 \max_{t \in [0, T]} |r(t)| \max_{t \in [0, T]} f_n(t) \right]$$

par conséquent ${}^c\mathcal{D}_{0^+}^\alpha u(x, t)$ est uniformément convergent dans D_T .

2.4 Dépendance continu de la solution par rapport aux données

Théorème 2.3. Soit \mathfrak{S} est la classe de triples sous la forme de $\Phi = \{f, \varphi, E\}$ qui vérifient les hypothèses (A1) – (A3) du théorème 2.2 et

$$0 < N_0 \leq \min_{t \in [0, T]} \left| \int_0^1 f(x, t) dx \right|, \quad \|f\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)} \leq N_1, \quad \|\varphi\|_{C^4[0,1]} \leq N_2, \quad \|E\|_{C^1[0,T]} \leq N_3,$$

pour certaines constantes positives $N_i, i = 0, 1, 2, 3$.

Alors la paire de solution (r, u) du problème inverse (2.1)-(2.5) dépend en permanence des données \mathfrak{S} .

Démonstration. Soit $\Phi = \{f, \varphi, E\}$ et $\tilde{\Phi} = \{\tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{E}\} \in \mathfrak{S}$ être deux ensembles de données.

Nous notons $\|\Phi\| = \|f\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)} + \|\varphi\|_{C^4[0,1]} + \|E\|_{C^1[0,T]}$.

Soit (r, u) et (\tilde{r}, \tilde{u}) est les solution des problèmes (2.1)-(2.5) correspondant aux données Φ et $\tilde{\Phi}$ respectivement

Selon (2.25) nous avons

$$r(t) = p(t) + \int_0^t Q(t, \tau) r(\tau) d\tau \tag{2.31}$$

et

$$\tilde{r}(t) = \tilde{p}(t) + \int_0^t \tilde{Q}(t, \tau) \tilde{r}(\tau) d\tau \tag{2.32}$$

Premièrement à partir des équations (2.22)-(2.24) et en utilisant $E(t) \in C^1[0, T]$, lemme 1.3, il est facile de calculer que

$$|{}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha F(t)| \leq N_4, \quad |{}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha E(t)| \leq N_5 \quad (2.33)$$

où

$$N_4 = c_4 N_2 M, \quad N_5 = \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(1-\alpha)} N_3.$$

Laissez nous estimer la différence $r - \tilde{r}$.

Formulaire (2.31) et (2.32) nous obtenons

$$r(t) - \tilde{r}(t) = p(t) - \tilde{p}(t) + \int_0^t [Q(t, \tau) - \tilde{Q}(t, \tau)] r(\tau) d\tau + \int_0^t \tilde{Q}(t, \tau) [r(\tau) - \tilde{r}(\tau)] d\tau. \quad (2.34)$$

Soit $\epsilon_1 = \|p - \tilde{p}\|_{C([0, T])} + \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{2N_1 M c_4}{N_0^2} \|f - \tilde{f}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)} \|r\|_{C([0, T])}$.

Puis dénoter $R(t) = (r(t) - \tilde{r}(t))$, équation (2.34) implique

$$R(t) \leq \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} R(\tau) d\tau$$

où $\epsilon_2 = \frac{N_1 M c_4}{N_0}$ Alors, une inégalité de Gronwall faiblement singulière, le lemme 2.4 , implique que

$$R(t) \leq \epsilon_1 E_\alpha(\epsilon_2 t^\alpha), \quad t \in [0, T].$$

Enfin en utilisant (2.34) on obtient il résulte de (2.25) que

$$\|r - \tilde{r}\|_{C([0, T])} \leq \epsilon_3 \left(\|p - \tilde{p}\|_{C([0, T])} + \|r\|_{C([0, T])} \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{N_1 M c_4}{N_0^2} \|f - \tilde{f}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)} \right) \quad (2.35)$$

où $\epsilon_3 = E_\alpha(\epsilon_2 T^\alpha)$. Aussi on peut estimer que

$$\|p - \tilde{p}\|_{C([0, T])} \leq M_1 \|f - \tilde{f}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)} + M_2 \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^4[0, 1]} + M_3 \|E - \tilde{E}\|_{C^1([0, T])} \quad (2.36)$$

où $M_1 = \frac{N_4 + N_5}{N_0^2}$, $M_2 = \frac{c_4 M N_1}{N_0^2}$, $M_3 = \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(1-\alpha)} \frac{N_1}{N_0^2}$

En utilisant l'inégalité (2.36) de(2.35) on obtient

$$\|r - \tilde{r}\|_{C([0, T])} \leq M_4 \left(\|f - \tilde{f}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^4[0, 1]} + \|E - \tilde{E}\|_{C^1([0, T])} \right) = M_4 \|\Phi - \tilde{\Phi}\|$$

où

$$M_4 = \max \left(\epsilon_3 M_2, \epsilon_3 M_1 + \epsilon_3 \|r\|_{C([0, T])} \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{N_1 M c_4}{N_0^2} \right).$$

Cela montre que r dépend continuellement des données d'entrée, à partir de (2.20), une estimation similaire est également obtenue pour la différence $u - \tilde{u}$ comme

$\|u - \tilde{u}\|_{C(\bar{D}_T)} \leq M_5 \|\Phi - \tilde{\Phi}\|$. Ceci complète la preuve du théorème 2.3. \square

ÉTUDE NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous avons présenté un schéma aux différences finis implicite pour déterminer numériquement la solution $u(x, t)$ du problème direct. Nous avons montré que cet schéma est stable et convergent. Ensuite, nous avons proposé un algorithme d'inversion pour la coefficient $r(t)$ du problème inverse (1)-(4). Des exemples numériques sont illustrés pour valider cet algorithme d'inversion.

3.1 Approximation numérique

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. On définit $t_j = jk$, $j = 0, 1, \dots, n$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, m$, où $k = \frac{T}{n}$ et $h = \frac{L}{m}$ sont le pas d'espace et le pas temps respectivement. Soit u_i^j l'approximation numérique de $u(x_i, t_j)$, f_i^{j+1} l'approximation numérique de $f(x_i, t_j)$ et r^{j+1} l'approximation numérique de $r(t_j)$.

1. La discrétisation de **la dérivée première** dans la direction x est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1}) = \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} + O(h), \quad (3.1)$$

2. La discrétisation de **la dérivée seconde ordre** dans la direction x est donnée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) = \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + O(h^2), \quad (3.2)$$

3. La discrétisation de les conditions initiales et aux limites sont données par :

– Pour la condition initiale :

$$u(x_i, 0) = \varphi(x_i) \Rightarrow u_i^0 = \varphi_i \quad (3.3)$$

– Pour les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u(x_0, t_{j+1}) = 0 &\Rightarrow u_0^{j+1} = 0 \\ u_x(x_m, t_{j+1}) = 0 &\Rightarrow u_m^{j+1} = u_{m-1}^{j+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

4. La discrétisation de **la dérive de Caputo** pour $0 < \alpha < 1$ est définie par le lemme suivant

Lemme 3.1. Une approximation discrète de la dérivée fractionnaire (1.5) peut être obtenue par une formule simple :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x_i, t_{j+1}) = \frac{k^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k'=0}^j b_{k'} \left[u_i^{j-k'+1} - u_i^{j-k'} \right], \quad (3.5)$$

où

$$b_{k'} = [(k' + 1)^{1-\alpha} - k'^{1-\alpha}]$$

Démonstration. D'après l'équation de la dérivée fractionnaire de Caputo (1.5), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x_i, t_{j+1}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{j+1}} \frac{\partial u(x_i, s)}{\partial s} \times \frac{ds}{(t_{j+1} - s)^\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{J=0}^j \int_J^{t_{j+1}} \frac{\partial u(x_i, s)}{\partial s} \times \frac{ds}{(t_{j+1} - s)^\alpha} \end{aligned}$$

d'autre part

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + O(k),$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{t_J}^{t_{J+1}} (t_{j+1} - s)^{-\alpha} ds &= \left[\frac{-(t_{j+1} - s)^{-\alpha+1}}{-\alpha + 1} \right]_{t_J}^{t_{J+1}} \\
&= \frac{1}{(1 - \alpha)} [(t_{j+1} - t_J)^{1-\alpha} - (t_{j+1} - t_{J+1})^{1-\alpha}] \\
&= \frac{1}{(1 - \alpha)} [((j + 1 - J)k - Jk)^{1-\alpha} - ((j + 1)k - (J + 1)k)^{1-\alpha}] \\
&= \frac{1}{(1 - \alpha)} [(j + 1 - J)^{1-\alpha} k^{1-\alpha} - (j - J)^{1-\alpha} k^{1-\alpha}] \\
&= \frac{k^{1-\alpha}}{(1 - \alpha)} [(j + 1 - J)^{1-\alpha} - (j - J)^{1-\alpha}]
\end{aligned}$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x_i, t_{j+1}) &= \frac{k^{1-\alpha}}{(1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha)} \sum_{J=0}^j \left[\frac{u(x_i, t_{J+1}) - u(x_i, t_J)}{k} \right] \times [(j + 1 - J)^{1-\alpha} - (j - J)^{1-\alpha}] \\
&+ O(k),
\end{aligned}$$

et d'après Propriétés (1.1), on a

$$(1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \Gamma(2 - \alpha);$$

donc,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x_i, t_{j+1}) = \frac{k^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{J=0}^j \left[\frac{u(x_i, t_{J+1}) - u(x_i, t_J)}{k} \right] \times [(j + 1 - J)^{1-\alpha} - (j - J)^{1-\alpha}] + O(k),$$

on pose

$$\begin{aligned}
k' = j - J &\iff J = j - k' \\
\begin{cases} J = 0 &\Rightarrow k' = j \\ J = j &\Rightarrow k' = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x_i, t_{j+1}) = \frac{k^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{J=0}^j \left[\frac{u(x_i, t_{J+1}) - u(x_i, t_J)}{k} \right] \times b_{k'} + O(k),$$

où

$$b_{k'} = (k' + 1)^{1-\alpha} - k'^{1-\alpha}.$$

□

5. La discétisation de $r(t)$ donnée par :
l'équation (2.25) devient

$$r(t_j) = p(t_j) + \int_0^{t_j} Q(t_j, \tau)r(\tau)d\tau$$

d'après la méthode de Trapèze, on obtient

$$r(t_j) = p(t_j) + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} Q(t_j, \tau) r(\tau) d\tau$$

alors

$$r(t_j) = p(t_j) + \frac{k}{2} \sum_{i=0}^{j-1} Q(t_j, \tau_{i+1}) r(\tau_{i+1}) + Q(t_j, \tau_i) r(\tau_i) d\tau$$

donc

$$r(t_j) = p(t_j) + \frac{k}{2} Q(t_j, \tau) r(\tau) + k \sum_{i=1}^{j-1} Q(t_j, \tau_i) r(\tau_i) \quad (3.6)$$

Si $j = 0$

$$\begin{aligned} r(t_0) &= r(a) = p(t_0) \\ &\Rightarrow r(a) = p(a) \\ &\Rightarrow r(0) = p(0) \end{aligned}$$

on notons

$$r_j = r(t_j), \quad p_j = p(t_j) \text{ et } Q_{ji} = Q(t_j, \tau_i)$$

Alors (3.6) de devient

$$r_j = p_j + \frac{k}{2} Q_{j0} r_0 + \frac{k}{2} Q_{jj} r_j + k \sum_{i=1}^{j-1} Q_{ji} r_i$$

donc on a, en général

$$\left(1 - \frac{k}{2} Q_{jj}\right) r_j = p_j + \frac{k}{2} Q_{j0} r_0 + k \sum_{i=1}^{j-1} Q_{ji} r_i \quad (3.7)$$

Cette discrétisation nous à fournée alors un systéme d'équations algebriques linéaires, de la forme $AX = b$ où A est une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{k}{2} Q_{10} & 1 - \frac{k}{2} Q_{11} & & & 0 \\ -\frac{k}{2} Q_{12} & -\frac{k}{2} Q_{22} & 1 - \frac{k}{2} Q_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ -\frac{k}{2} Q_{1n} & \dots & \dots & 0 & 1 - \frac{k}{2} Q_{nn} \end{pmatrix}$$

où $r = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ et $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$

S'agissant de la solubilité du système (3.7), un rôle essentiel revient au déterminant de la matrice A .

Cette matrice, elle a pour déterminant

$$\det(A) = \left(1 - \frac{k}{2} Q_{11}\right) \left(1 - \frac{k}{2} Q_{22}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{2} Q_{nn}\right)$$

parceque la matrice A est triangulière inferieur.

Soit $M = \max_{1 \leq j \leq n} |Q_{jj}|$, il en résulte évidemment

$$\begin{aligned} \det(A) &\geq \left(1 - \frac{k}{2}M\right)^n = \left(1 - \frac{b-a}{2n}M\right)^n \\ &\geq \left(1 - \frac{k}{2}M\right)^{\frac{b-a}{k}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

le second membre de cette inégalité est non nul pour tout h suffisamment petit, il en croit avec la diminution de h , ainsi $(1 - \frac{k}{2}M)$ et pour k deux fois moindre

$$\left(1 - \frac{k}{2}M\right)^2 = 1 - \frac{k}{2}M + \frac{k^2}{16}M^2$$

Lorsque $k \rightarrow 0$, le second membre de (3.8) tend vers $\exp(-(b-a)\frac{M}{2})$.

Algebriquement dit, le déterminant du système (3.7) est non nul et ne tend pas vers 0 avec k ce qui prouve justement l'absence des valeurs de l'équation de Volterra.

3.1.1 Schéma des différences finies

Un schéma implicite peut être donné par suite :

En utilisant (3.2) (3.5) et (3.7), l'équation de problème (2.1) devient

$$\frac{k^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k'=0}^j b_{k'} \left[u_i^{j+1-k'} - u_i^{j-k'} \right] = \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + r^{j+1} f_i^{j+1},$$

ce que implique que

$$\sum_{k'=0}^j b_{k'} \left[u_i^{j+1-k'} - u_i^{j-k'} \right] = \frac{k^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{h^2} (u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + k^\alpha \Gamma(2-\alpha) r^{j+1} f_i^{j+1}.$$

Pour $i = 1, 2, \dots, M-1; j = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Soit $q = \frac{k^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{h^2}$ l'équation ci dessus peut être réécrite comme suivant

$$-q(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) = -\sum_{k'=1}^{j+1} b_{k'} \left[u_i^{j+1-k'} - u_i^{j-k'} \right] + k^\alpha \Gamma(2-\alpha) r^{j+1} f_i^{j+1}.$$

$$-q(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) = -u_i^{j+1} + u_i^j - \sum_{k'=1}^j b_{k'} \left[u_i^{j+1-k'} - u_i^{j-k'} \right] + k^\alpha \Gamma(2-\alpha) r^{j+1} f_i^{j+1}.$$

$$-qu_{i+1}^{j+1} + (1+2q)u_i^{j+1} - qu_{i-1}^{j+1} = u_i^j - \sum_{k'=1}^j b_{k'} \left[u_i^{j+1-k'} - u_i^{j-k'} \right] + k^\alpha \Gamma(2-\alpha) r^{j+1} f_i^{j+1}.$$

Par conséquent

1. Pour $j = 0$

$$-qu_{i+1}^1 + (1 + 2q)u_i^1 - qu_{i-1}^1 = u_i^0 + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^1 f_i^1$$

De (3.3) on obtient

$$-qu_{i+1}^1 + (1 + 2q)u_i^1 - qu_{i-1}^1 = \varphi_i + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^1 f_i^1$$

Donc, le schéma des différences finies implicite pour $j = 0$ est donnée par

$$-qu_{i+1}^1 + (1 + 2q)u_i^1 - qu_{i-1}^1 = \varphi_i + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^1 f_i^1 \quad (3.9)$$

2. Pour $j > 0$

$$\begin{aligned} & -qu_{i+1}^{j+1} + (1 + 2q)u_i^{j+1} - qu_{i-1}^{j+1} \\ &= u_i^j - \sum_{k'=1}^j b_{k'} \left[u_i^{j+1-k'} - u_i^{j-k'} \right] + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^{j+1} f_i^{j+1} \\ &= u_i^j - \sum_{k'=0}^{j-1} b_{k'+1} u_i^{j-k'} - \sum_{k'=1}^j b_{k'} u_i^{j-k'} + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^{j+1} f_i^{j+1} \\ &= \sum_{k'=1}^{j-1} [-b_{k'} - b_{k'+1}] u_i^{j-k'} + u_i^j + b_1 u_i^j - b_2 u_i^{j-1} - b_1 u_i^{j-1} - b_j u_i^0 + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^{j+1} f_i^{j+1} \\ &= \sum_{k'=1}^{j-1} [-b_{k'} - b_{k'+1}] u_i^{j-k'} + (1 + b_1) u_i^j + \underbrace{(-b_2 u_i^{j-1} - b_1 u_i^{j-1})}_{k'=0} - b_j u_i^0 + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^{j+1} f_i^{j+1} \\ &= \sum_{k'=1}^{j-1} [-b_{k'} - b_{k'+1}] u_i^{j-k'} + (1 + b_1) u_i^j - b_j u_i^0 + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^{j+1} f_i^{j+1}. \end{aligned}$$

Donc, le schéma des différences finies implicite pour $j > 0$ est donnée par

$$-qu_{i+1}^{j+1} + (1 + 2q)u_i^{j+1} - qu_{i-1}^{j+1} = \sum_{k'=0}^{j-1} C_{k'} u_i^{j-k'} + (1 + b_1) u_i^j - b_j u_i^0 + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^{j+1} f_i^{j+1} \quad (3.10)$$

où

$$C_{k'} = -b_{k'} - b_{k'+1}.$$

3.1.2 Système matricielle

On observe qu'on obtient $(m - 1)$ équations servant à déterminer les $(m - 1)$ inconnues $(u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$. On dit usuellement qu'on a discrétisé le problème par une méthode de différences finies utilisant le schéma implicite. On note que la connaissance des conditions au bord u_0 et u_{m-1} est nécessaire à la résolution du système, puisqu'elles apparaissent dans (3.9), (3.10) lorsque $i = 1, \dots, m - 1$

Théorème 3.1. ([12]) *Le schéma de différence finie implicite défini par (3.11) est inconditionnellement stable.*

Démonstration. Soit $\tilde{\varphi}$ une conditions initiale perturbée à laquelle on associe une nouvelle solution \tilde{U}^j et à l'aide de système de différence linéaire (3.11) nous avons

$$\begin{cases} B\tilde{U}^1 = \tilde{U}^0 + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^1 f^1, \\ B\tilde{U}^{j+1} = (1 + b_1)\tilde{U}^j - b_j \tilde{U}^0 + c_0 \tilde{U}^1 + \dots + c_j \tilde{U}^1 + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^{j+1} f_i^{j+1}. \end{cases} \quad (3.15)$$

et soit $E^j = \tilde{U}^j - U^j$ désigne l'erreur de solution pour l'itération d'étape j , et $j = 0, 1, \dots, n - 1$. En utilisant (3.11) et (3.15), on obtient

$$\begin{cases} BE^1 = E^0, \quad E^0 = \tilde{\varphi} - \varphi, \\ BE^{j+1} = (1 + b_1)E^j - b_j E^0 + c_0 E^1 + \dots + c_j E^1. \end{cases} \quad (3.16)$$

pour montrer que $\|E^{j+1}\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty$, pour $j = 0, 1, \dots, n - 1$, on utilisent la récurrence

– Si $j=0$, par (3.16) on a

$$BE^1 = E^0,$$

on multiplient par B^{-1} on obtient

$$E^1 = B^{-1}E^0,$$

d'où

$$\|E^1\|_\infty = \|B^{-1}E^0\|_\infty,$$

d'après les propriétés de la norme matricielle on obtient

$$\|E^1\|_\infty \leq \|B^{-1}\|_\infty \|E^0\|_\infty,$$

d'autre par, de théorème 1.3, nous avons

$$\rho(B) \leq \|B\|_\infty,$$

alors,

$$\|B^{-1}\|_\infty \leq \rho(B^{-1}),$$

et en utilisant Proposition 3.1 on trouve

$$\|B^{-1}\|_\infty \leq \rho(B^{-1}) < 1,$$

d'où

$$\|B^{-1}\|_\infty < 1$$

par conséquent

$$\|E^1\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty,$$

supposons qu'il existe

$$\|E^{k'}\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty, \text{ pour } k' = 2, \dots, j,$$

– d'après (3.16) on a

$$BE^{j+1} = (1 + b_1)E_j - b_jE^0 + c_0E^1 + \dots + c_jE^1$$

alors

$$E^{j+1} = B^{-1} \left((1 + b_1)E_j - b_jE^0 + c_0E^1 + \dots + c_jE^1 \right)$$

d'où

$$\|E^{j+1}\|_\infty = \|B^{-1} \left((1 + b_1)E_j - b_jE^0 + c_0E^1 + \dots + c_jE^1 \right)\|_\infty,$$

grâce à les propriétés de la norme matricielle

$$\|E^{j+1}\|_\infty \leq \left(\underbrace{\|B^{-1}\|_\infty}_{<1} \right) \|(1 + b_1)E_j - b_jE^0 + c_0E^1 + \dots + c_jE^1\|_\infty,$$

en utilisant l'hypothèse précédente on trouve

$$\|E^{j+1}\|_\infty \leq \left(\sum_{k'=1}^j c_{k'} + b_j \right) \|E^0\|_\infty,$$

et d'après Lemme 3.2 on obtient

$$\|E^{j+1}\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty,$$

donc,

$$\|E^{j+1}\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty, \text{ pour } j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.17)$$

Ce qui signifie que le schéma de différence implicite (3.11) est stable. \square

Théorème 3.2. ([12]) *La solution de différence du système linéaire (3.11) est convergente à la solution exacte du problème (2.1), (2.2)-(2.3) lorsque $h, k \rightarrow 0$ pour le domaine de temps fini.*

Démonstration. Soit $e_i^j = u(x_i, t_j) - u_i^j$ ($i = 1, 2, \dots, m-1, j = 1, 2, \dots, n-1$), où $u(x_i, t_j)$ est la solution exacte du problème (2.1), (2.2)-(2.3) à point de maillage $u(x_i, t_j)$, et u_i^j est la solution de schéma de différence (3.11) aussi à $u(x_i, t_j)$. Où $e^j = (e_1^j, e_2^j, \dots, e_{m-1}^j)^T$, on remarque que $e_i^0 = u(x_i, 0) - \varphi_i = 0$, donc, $e^0 = 0$. Nous avons $u_i^j = u(x_i, t_j) - e_i^j$ en le remplaçant (3.8) et (3.9) donc,

– **Pour** $j = 0$

$$\begin{aligned} & -q [u(x_{i+1}, t_1) - e_{i+1}^1] + (1 + 2q) [u(x_i, t_1) - e_i^1] - q [u(x_{i-1}, t_1) - e_{i-1}^1] = u(x_i, t_0) - e_i^0 \\ & + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r_i^1 f_i^1, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & -qe_{i+1}^1 + (1 + 2q)e_i^1 - qe_{i-1}^1 = -q [u(x_{i+1}, t_1) - 2u(x_i, t_1) + u(x_{i-1}, t_1)] + u(x_i, t_1) - u_i^0 \\ & - k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r_i^1 f_i^1 \\ & = R_i^1, \end{aligned}$$

– Pour $j > 0$

$$-q [u(x_{i+1}, t_{j+1}) - e_{i+1}^{j+1}] + (1 + 2q) [u(x_i, t_{j+1}) - e_i^{j+1}] - q [u(x_{i-1}, t_{j+1}) - e_{i-1}^{j+1}] = (1 + b_1) \times [u(x_i, t_j) - e_i^j] + \sum_{k'=1}^{j-1} c_{k'+1} [u(x_i, t_{j-k'}) - e_i^{j-k'}],$$

Alors

$$\begin{aligned} & -qe_{i+1}^{j+1} + (1 + 2q)e_i^{j+1} - qe_{i-1}^{j+1} = (1 + b_1)e_i^j + \sum_{k'=1}^{j-1} c_{k'+1}e_i^{j-k'} - \sum_{k'=1}^{j-1} c_{k'+1}u(x_i, t_{j-k'}) + u(x_i, t_{j+1}) \\ & -q [u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1})] + u(x_i, t_{j+1}) - (1 + b_1)u(x_i, t_j) + b_ju(x_i, t_0) \\ & -k^\alpha \Gamma(2 - \alpha)r_i^1 f_i^1 \\ & = (1 + b_1)e_i^j + \sum_{k'=1}^{j-1} e_i^{j-k'} + R_i^{j+1}, \end{aligned}$$

Soit $R^j = (R_1^j, R_2^j, \dots, R_{m-1}^j)^T$ une erreur de troncature dans l'approximation des solutions pour $j = 1, 2, \dots, n$, on a $e_0^{j+1} = 0$ et $e_m^{j+1} = e_{m-1}^{j+1}$, et en utilisant le système de différence linéaire (3.11), nous avons

$$\begin{cases} Be^1 = R^1, \\ Be^{j+1} = (1 + b_1)e^j - b_j e^1 + c_0 e^1 + \dots + c_j e^1 + R^{j+1}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Où

$$\begin{aligned} R_i^{j+1} &= - \sum_{k'=1}^{j-1} c_{k'+1} u(x_i, t_{j-k'}) - q [u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1})] + u(x_i, t_{j+1}) \\ & - (1 + b_1)u(x_i, t_j) + b_j u(x_i, t_0) - k^\alpha \Gamma(2 - \alpha)r_i^{j+1} f_i^{j+1} \\ & - \underbrace{\sum_{k'=1}^{j-1} (-b_j - b_{j+1})u_i^{j-k'} + (1 + b_1)u(x_i, t_j)}_{I_1} \\ & + \underbrace{b_j u(x_i, t_0) - q [u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1})] - k^\alpha \Gamma(2 - \alpha)r_i^{j+1} f_i^{j+1}}_{I_2}. \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= - \sum_0^{j-1} b_{j+1} u_i^{j-k'} - \sum_{k'=1}^j b_j u_i^{j-k'} - (1 + b_1)u(x_i, t_j) + b_j u(x_i, t_0) \\ & \sum_{k'=0}^j b_j [u_i^{j+1-k'} - u_i^{j-k'}] = \sum_{k'=0}^j b_j [u(x_i, t_{j+1-k'}) - u(x_i, t_{j-k'})] \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R^{j+1} &= \sum_{k'=0}^j b_j [u(x_i, t_{j+1-k'}) - u(x_i, t_{j-k'})] - \frac{k^\alpha \Gamma(2 - \alpha)}{h^2} [u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1})] \\ & - k^\alpha \Gamma(2 - \alpha)r_i^{j+1} f_i^{j+1} \end{aligned}$$

De (3.2) nous avons

$$\frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1}))}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial u^2}(x_i, t_{j+1}) + O(h^2)$$

et

$$\frac{1}{k^\alpha \Gamma(2 - \alpha)} \sum_{k'=0}^j b_{k'} [u(x_i, t_{j+1-k'}) - u(x_i, t_{j-k'})] = \frac{\partial^\alpha u}{\partial u^\alpha}(x_i, t_{j+1}) + O(k^2)$$

par conséquent

$$R_i^{j+1} = k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) \left[\frac{\partial^\alpha u}{\partial u^\alpha}(x_i, t_{j+1}) - \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} - r^{j+1} f_i^{j+1} + O(h^2) + O(k^2) \right]$$

De l'équation de diffusion fractionnaire (2.1), on obtient

$$R_i^{j+1} = k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) O(h^2 + k^2),$$

ce qui implique que il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|R^{j+1}\|_\infty \leq M k^\alpha \Gamma(2 - \alpha), \text{ pour } j = 0, 1, \dots, n-1,$$

par récurrence, on peut démontrer l'inégalité suivante

$$\|e^{j+1}\|_\infty \leq \frac{1}{b_j} M k^\alpha \Gamma(2 - \alpha), \quad (3.19)$$

où $M > 0$ représente une constante positive arbitraire et b_j est donné par (3.5)

– Pour $j = 0$, d'après (3.18) on a

$$e^1 = B^{-1} R^1,$$

alors,

$$\begin{aligned} \|E^1\|_\infty &= \|B^{-1} R^1\|_\infty \\ &\leq \|B^{-1}\|_\infty \|R^1\|_\infty \\ &< \|R^1\|_\infty, \end{aligned}$$

et d'après (3.19)

$$\|e^1\|_\infty < M k^\alpha (h^2 + k^2),$$

on pose que

$$\|e^{k'}\|_\infty < \frac{1}{b_{k'-1}} M k^\alpha (h^2 + k^2), \quad k' = 1, 2, \dots, j \quad (3.20)$$

– d'après (3.18)

$$e^{j+1} = B^{-1}(c_1 e^j + c_2 e^{j-1} + \dots + c_1 e^{j+1} + R^{j+1}),$$

alors

$$\begin{aligned}
\|e^{j+1}\|_\infty &= \|B^{-1}(c_1e^j + c_2e^{j-1} + \dots + c_1e^{j+1} + R^{j+1})\|_\infty \\
&\leq \|B^{-1}\| \|c_1e^j + c_2e^{j-1} + \dots + c_1e^{j+1} + R^{j+1}\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{b_j}(b_jc_1 \|e^j\|_\infty + b_jc_2 \|e^{j-1}\|_\infty + \dots + b_jc_j \|e^1\|_\infty + \|R^{j+1}\|_\infty)
\end{aligned}$$

de (3.5) nous avons $b_j < 1$, et d'après (3.19)-(3.20) on obtient

$$\|e^{j+1}\|_\infty \leq \frac{1}{b_j} \left(\sum_{k=1}^{k'} c_{k'} + b_j \right) M k^\alpha (h^2 + k^2),$$

et en utilisant lemme 3.2 on trouve

$$\|e^{j+1}\| \leq \frac{1}{b_j} M k^\alpha (h^2 + k^2), \quad (3.21)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{b_j j^\alpha} &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{j^{1-\alpha} \left[\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{1-\alpha} - 1 \right] j^\alpha} \\
&= \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{j \left[\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{1-\alpha} - 1 \right]} \\
&= \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{j \left[1 + \frac{1-\alpha}{j} - 1 \right]} \\
&= \frac{1}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

on a $t_j = jk \Rightarrow k^\alpha = \frac{t_j^\alpha}{j^\alpha}$ donc, par (3.21) on obtient

$$\|e^{j+1}\|_\infty < \frac{M}{b_j j^\alpha} t^\alpha (h^2 + k^2),$$

et nous avons $\frac{t_j^\alpha}{j^\alpha} \leq \frac{T^\alpha}{j^\alpha}$, alors, pour j suffisamment grand on peut déduire que

$$\|e^{j+1}\|_\infty < \frac{M}{1-\alpha} T^\alpha (h^2 + k^2),$$

ce qui implique que l'affirmation du théorème est valide

□

3.2 Algorithme

Algorithme de Thomas

Initialisation :

$$m, n, \alpha$$

$$h = 1/m$$

$$k = 1/n$$

$$q = \frac{k^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{h^2}$$

$$\mathbf{Pour} \ i = 1 : m - 2$$

$$b_i = 1 + 2q$$

$$b_{m-1} = 1 + q$$

$$\mathbf{Pour} \ i = 1 : m - 2$$

$$c_i = -q$$

$$\mathbf{Pour} \ i = 2 : m - 1$$

$$a_i = -q$$

Triangularisation :

$$d = u_0 + k^\alpha \Gamma(2 - \alpha) r^1 f^1$$

$$\mathbf{Pour} \ i = 1$$

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - c'_{i-1} a_i}$$

$$\mathbf{Pour} \ i = 1$$

$$d'_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

$$\mathbf{Pour} \ i = 2 : m - 1$$

$$d'_i = \frac{d_i - d'_{i-1} a_i}{b_i - c'_{i-1} a_i}$$

Résolution :

$$u_{m-1} = d'_{m-1}$$

$$\mathbf{Pour} \ i = m - 2 : -1 : 1$$

$$u_i = d'_i - c'_i u_{i+1}$$

$$\mathbf{Pour} \ j = 1 : n - 1$$

$$r(t_j) = \frac{c \mathcal{D}E(t_j) + \frac{(u_1^j - u_0^j)}{h^2}}{\frac{h}{2} [f(1, t_j) + f(0, t_j)]}$$

écrire

stop

3.3 Application numérique

Dans cette section, nous avons implémenté notre schéma de différence sur un exemple qui supporte l'analyse théorique

Dans l'équation (2.1), soient $\alpha = \frac{1}{2}$, le terme source $r(t) = e^t$ et $f(x, t) = \left[\frac{x^2(1-x)^2 \Gamma(21)}{\Gamma(21-\alpha)} (t^{20-\alpha}) - (12x^2 - 12x + 2)(t^{20} + 1) \right] e^{-t}$, la condition initiale (2.2) $\varphi(x) = x^2(1-x)^2$, les conditions aux limites (2.3) $u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$ et la solution exacte de problème

inverse $u(x, t) = x^2(1 - x)^2(t^{20} + 1)$. En utilisant **Matlab**, nous avons représenté la solution numérique, la solution exacte et le terme source $r(t)$ du problème inverse, avec $(m = 100, n = 100)$

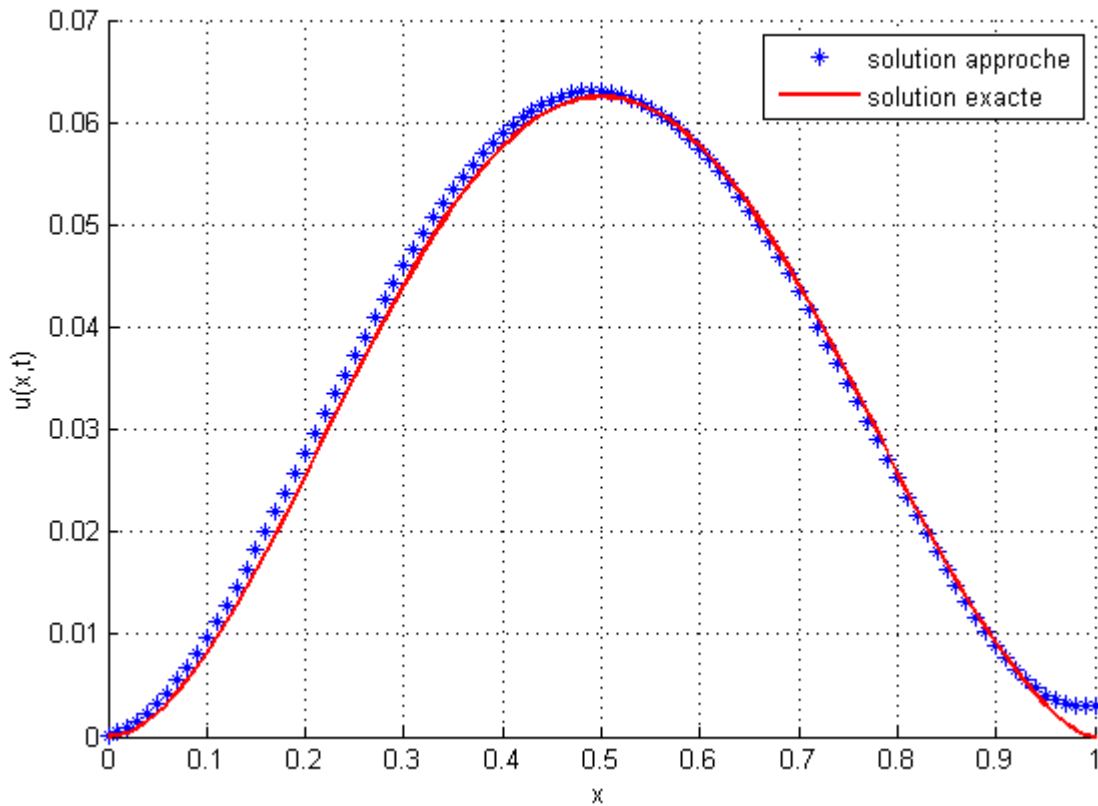
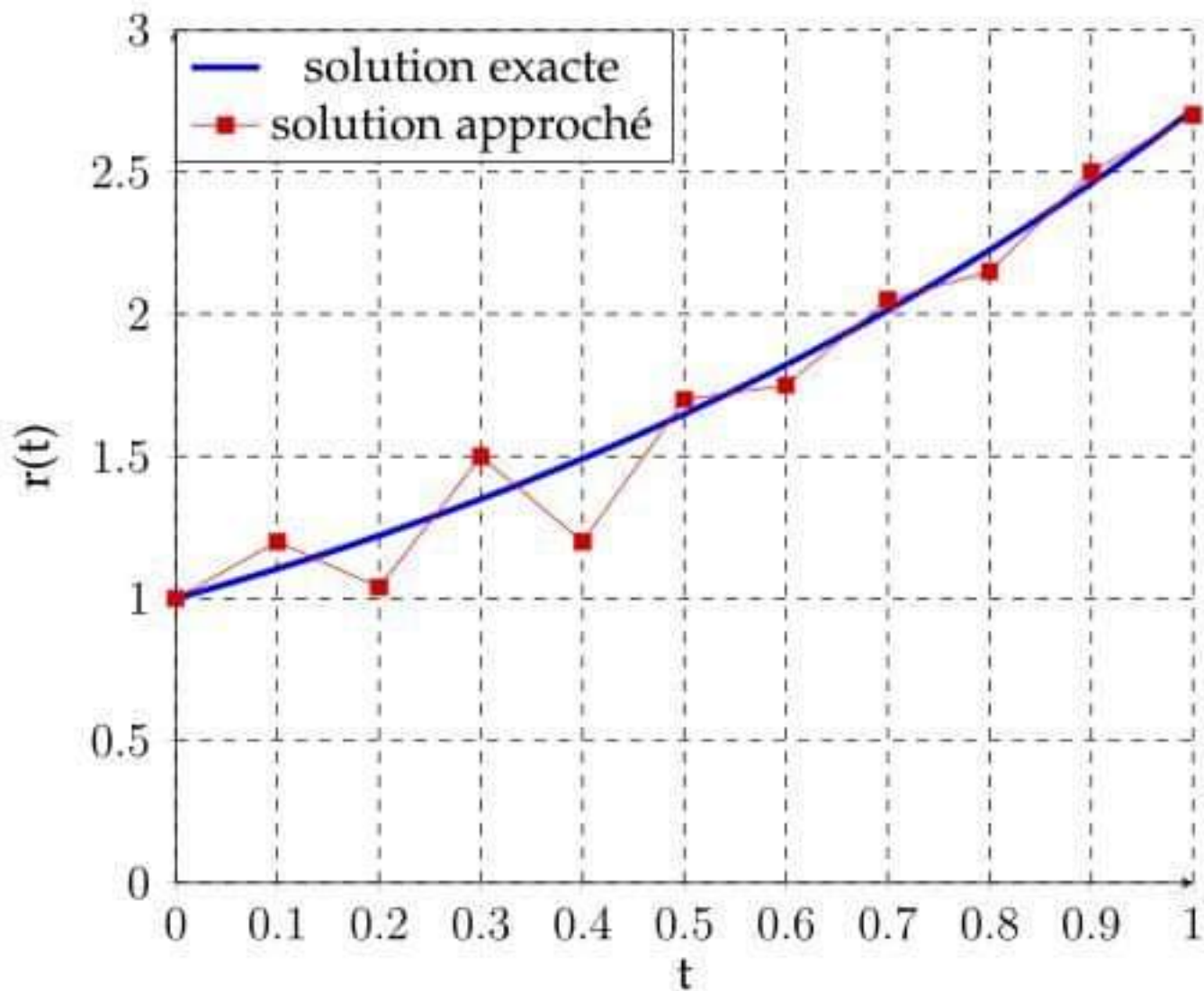


FIGURE 3.1 – la solution exacte et la solution approche de $u(x, t)$

FIGURE 3.2 – la solution exacte et la solution approché de $r(t)$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse de source terme pour déterminer numériquement un coefficient dépendant de temps dans une équation de diffusion fractionnaire temporelle de Caputo en dimension un avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann homogènes et une condition supplémentaire de type intégrale. Ce mémoire se déroule en deux étapes :

Étude théorique : nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème inverse de terme source (1)-(4) en utilisant la méthode de Fourier et les équations intégrales de type Volterra, ainsi que un résultat de la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Étude numérique : nous avons présenté un schéma aux différences finis implicite pour déterminer numériquement la solution $u(x, t)$ du problème direct (1)-(3). Nous avons montré que cet schéma est stable et converge. Ensuite, nous avons proposé un algorithme d'inversion pour la coefficient $r(t)$ du problème inverse (1)-(4). Des exemples numériques sont illustrés pour valider cet algorithme d'inversion.

Comme perspectives, nous avons le problème ouvert suivant :

- ☞ Analyse mathématique et numérique d'un problème inverse de terme source pour une équation de diffusion-onde fractionnaire avec condition de type intégrale suivant :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = u_{xx}(x, t) + r(t)f(x, t), & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ \int_0^1 u(x, t) dx = E(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

où ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t)$ est la dérivée de Caputo d'ordre $1 < \alpha < 2$ définie par :

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial s^2} ds.$$

Bibliographie

- [1] A.Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [2] Sum S Bai Z, Zhang S. Monotone iterative method for fractional differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, (6) :1–8, 2016.
- [3] C. Bolley. *Analyse numérique*. École Centrale de Nantes, 2012.
- [4] J. Cheng, J. Nakagawa, M. Yamamoto, and T. Yamazaki. Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation. *Inverse Probl.*, 25 :115002, 2009.
- [5] P. G. Ciarlet. *Introduction à L'analyse Numérique matricielle et à L'optimisation*. Université Pierre et Marie Curie, 1988.
- [6] Ford NJ Deithelm K. Analysis of fractional differential equations. *J. Math. Anal. Appl*, 265 :229–248, 2002.
- [7] S Dixon, J. Mckee. Weakly singular discrete gronwall incequalities. *Z. Angew. Math. Mech*, 66 :535–1544, 1986.
- [8] Mainardi F. On some properties of the mittag-leffler function $e_{\alpha}(-t^{\alpha})$, completely monotone fort $t > 0$ with $0 < \alpha < 1$. *Discrete Contin. Dyn. Syst*, 19(7) :2267–2278, 2014.
- [9] G.Allaire. *Analyse Numérique et optimisation*. Pris, Janvier 2005.
- [10] Makroglou.A Galperin.E.A, Kansa.E.J and Nelson S.A. *Variable transformations in the numerical solution of second kind Volterre integral equations with continuous and weakly singular kernels; extensions to Fredholm integral equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999.
- [11] G.Li and al Simultaneous. An inverse time dependent source problem for the heat equation. *Appl. Numer. Math.*, 29 :1–36, 2013.
- [12] W.Gu G.Li and X.jia. Numerical inversions for space-dependent diffusion coefficient inthe time fractional diffusion equation. *Inverse Ill Posed Probl.*, 20 :339–336, 2012.
- [13] A. Hazanee, I. MI, D. Lesnic, and K. NB. An inverse time-dependent source problem for the heat equation. *Appl. Numer. Math.*, 69 :13–33, 2013.
- [14] Kerimov NB Hazanee A., Lesnic D. ; Ismailov MI. An inverse time dependent source term for the heat equation with a non-classical boundary condition. *Applied Mathematical Modelling*, 39 :6258–6272, 2015.
- [15] Mansur I. Ismailov. Inverse source problem for a time-fractional heat equation with generalized impedance boundary conditin. 10607.03311v2, September 2016.
- [16] M.I. Ismailov and M. Cicek. fractional order in the time fractional diffusion equation. *Appl. Math. Model.*, 40 :4891–4899, 2013.

- [17] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. *THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. ELSEVIER, 2006.
- [18] M. Kirane and S. AM. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the linear heat equation involving fractional derivative in time. *Appl. Math. Comput.*, 218 :63–170, 2011.
- [19] R.J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. University of Washington, Seattle, Washington, 2007.
- [20] Y. Luchko. Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation. *Comput. Math. Appl.*, 59 :1766–1772, 2010.
- [21] F.Nec Merguntur. *Méthodes numériques et optimisation*. Paris, 2015.
- [22] R. Metzler and J. Klafter. Boundary value problems for fractional diffusion equations. *Physica A*, 278 :107–125, 2000.
- [23] I. MI, F. Kanca, and D. Lesnic. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral over determination conditions. *Appl. Math. Comput.*, 218 :4138–4146, 2011.
- [24] Vainikko G Pedas A. Integral equations with diagonal and boundary singularities of the kernel. *Z Anal Anwend*, 25(4) :447–516, 2006.
- [25] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [26] R.Herbin. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Université Aix Marseille 1, 2008.
- [27] K. Sakamoto and M. Yamamoto. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 382 :426–447, 2011.
- [28] E. SD and K. AN. Cauchy problem for fractional diffusion equations. *J. Differ. Equ.*, 199 :211–255, 2004.
- [29] S.G.Samko, A.A.Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [30] A. TS, M. Kirane, and S. AM. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type-over determining condition. *Electron. J. Differ. Equ.*, 213(270) :1–16, 2013.
- [31] Y.POVSTENKO. *Linear Fractionnal Diffusion-Wave Equation for Scientists and Engineers*. ELSEVIER, 2010.
- [32] Y. Zhang and X. Xu. Inverse source problem for a fractional diffusion equation. *Inverse Probl.*, 27 :035010, 2011.

ملخص: في هذه المذكرة ، درسنا مسألة عكسية لتحديد معامل متعلق بالوقت في معادلة الانتشار الكسرية مع شروط حدية مختلطة ومتجانسة و شرط إضافي على شكل تكامل. لقد أثبتنا وجود الحل ووحدانيته وكذلك الارتباط المستمر بالنسبة للمعطيات وذلك باستخدام طريقة فورييه ومعادلة تكاملية لفولتيرا. اقترحنا خوارزمية انعكاس تستند إلى مخطط ضمني لحل هذه المسألة العكسية عدديا. أخيرًا ، قدمنا أمثلة عددية للتحقق من هذه الخوارزمية.

كلمات مفتاحية: مسألة عكسية، طريقة فورييه، معادلة الانتشار الكسرية، معادلة تكاملية لفولتيرا، مخطط ضمني.

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour déterminer un coefficient de terme source dépend de temps dans une équation de diffusion fractionnaire avec des conditions aux limites mixtes homogènes et une condition de type intégrale. Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que la dépendance continue par rapport aux données, en utilisant la méthode de Fourier et l'équation intégrale de Volterra. Ensuite, nous avons proposé un algorithme d'inversion basé sur un schéma implicite pour résoudre numériquement ce problème inverse. Finalement, nous avons présenté des exemples numériques pour valider cet algorithme.

Mots-Clés : Problème inverse, Méthode de Fourier, Équation de diffusion fractionnaire, Équation intégrale de Volterra, Schéma implicite.

In this memoir, we studied an inverse problem to determine a time dependent source term coefficient in a fractional diffusion equation with homogeneous mixed boundary conditions and an integral type condition. We have demonstrated the existence and uniqueness of the solution, as well as the continuous dependence on the data, using the Fourier method and the integral Volterra equation. Then, we proposed an inversion algorithm based on an implicit scheme to solve numerically this inverse problem. Finally, we presented numerical examples to validate this algorithm.

Keywords : Inverse problem, Fourier method, Fractional diffusion equation, Integral equation of Volterra, Implicit scheme.