REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Étude d'un problème aux limites sous-linéaire du second ordre sur un intervalle non borné par la méthode variationnelle.

Présentée par :
M^{lle} Fatima MAAMMERI

Membres de jury :

Mr. Brahim BOUGHERARA	M.C.A,	Université de M'sila	**Président**.
Mr. Dahmane BOUAFIA	M.C.A,	Université de M'sila	**Encadreur.**
Mr. Rabah MECHETER	M.C.B,	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2021/2022

hhhhh
jjjj
jjjj
kkk
jjj
jjjj
ooooo
kkkkk

بسم الله الرحمن الرحيم

رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي

وأن أعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك

في عبادك الصالحين

Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études. Qu ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et Teconnaissance

A mes frères et mes sœurs , mes grands-parents et ma famille qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

A tous ceur qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceur qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

Merci !

Fatima Maammeri ✍

Remercement

Tout d'abord, J'adresse mon sincère remerciement au Mr. Dahmane BOUAFIA, pour son aide et son soutien toute long la réalisation de ce travail. Surtout sa lecture attentive de la version finale et pour perspicace discussion et des commentaires constructifs, qui ont été d'une grande valeur.

je voudrais remercier tous mes proches, ma famille et mes amis,pour leur amour et leur soutien de tous les temps.

Je remercie les membres de jury, chacun à son nom, d'avoir accepté d'examiner mon travail. Sans oublier mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Je remercie l'administration de la faculté des mathématiques et informatique le département des mathématiques pour leur support technique.

Enfin, je tiens à remercier qui m'a aidé par n'importe quoi, des enseignants et collègues et amis.

Fatima Maammeri ✍

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert.
X'	Dual topologique de X.
$L^p(\Omega)$	$= \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable : $\lvert u\rvert^p \in L^1(\Omega) \Big\}$ avec $1 \leq p < \infty$.
$\lVert u\rVert_{L^p}$	$= \big(\int_\Omega \lvert u(x)\rvert^p dx \big)^{\frac{1}{p}}$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists C : \lvert u(x)\rvert \leq C \ p.p \ sur \ \Omega\}$.
$\lVert u\rVert_{L^\infty}$	$= \inf\{C : \lvert u(x)\rvert \leq C$ p.p sur $\Omega\}$.
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω.
$D(A)$	Domaine de définition d'un opérateur borné A.
$R(A)$	Image de A qui est noté aussi par ImA.
(X, d)	Espace métrique .
$< ., . >$	Définit un produit scalaire.
$\mathcal{L}(X, Y)$	Ensemble des applications linéaires continues.
$\hookrightarrow$	On écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	: On écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est compacte.
p.p	Presque partout.
$\partial_v F$	Dérivée directionnelle de F dans la direction v.
dF	Dérivée au sens de Fréchet qui est noté aussi par F'.
$d_G F$	Dérivée au sens de Gâteaux.
EVP	Principe variationnel d'Ekeland .
s.c.i	Semi continue inférieur.
s.c.s	Semi continue supérieur.
f.s.c.i	Faiblement semi continue inférieur.
f.s.c.s	Faiblement semi continue supérieur .
$\mathcal{D}(J)$	Domaine de définition de J.

Table des matières

Introduction générale

Les méthodes variationnelles et la théorie des points critiques se sont révélées être des techniques très utiles et populaires pour prouver l'existence de solutions aux problèmes aux limites dans une variété de paramètres, y compris les équations différentielles ordinaires, les équations différentielles partielles, les problèmes impulsifs, etc.

De nombreux chercheurs ont étudié de manière approfondie l'existence et la multiplicité des solutions aux problèmes aux limites. Beaucoup de résultats l'existence de solutions positives ont été obtenu en utilisant le principe variationnel d'Ekeland.

Principe de variation de Ekeland est l'un des résultats les plus importants dans l'analyse non linéaire et d'optimisation pour les quatre dernières décennies. Il a été mis au point, généralisé et appliquée à de nombreux domaines mathématiques par de nombreux auteurs à travers le monde. Le principe variationnel d'Ekeland garantit l'existence de solutions presque optimales des problèmes d'optimisation.

Dans cette mémoire on va donner un application du principe variationnel d'Ekeland on utilise l'article [2] qui utilisent le principe variationnel d'Ekeland pour étudier des problèmes aux limites.

Cette mémoire était divisée en trois chapitres, comme suite :

Le premier chapitre est consacré à quelques outils d'analyse fonctionnelle à utiliser tout au long de ce travail, à savoir les espaces normés, Banach et de Hilbert, les opérateurs linéaires bornés (la continuité et la différentiability), Méthodes variationnelles et théorie des points critiques, et le principe variationnel d'Ekeland.

Dans le second chapitre, on s'intéresse à démontrer quelques propéritées des injections continues et compacts dans l'espace de Hilbert , en siute on definie l'espace de Lebesgue et donner quelques théorémes impertantes, de méme on parle au l'espace de Soboleve,enfin,on presente la théoréme de compacité .

Au chapitre trois, nous présenterons un application de principe variationnel d'Ekeland pour étudé l'existence de solutions à un problème aux limites du second ordre suivant :

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' = \lambda q(x) f(x, u(x)), \quad x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, λ sont des paramètres réels positifs.

Pour obtenir les résultats, nous avons utilisé les conditions et les hypothèses suivantes :

$(H1)$ il existe des constantes $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et $r \in (0,1)$ tel que

$$|f(x,u)| \leq a|u|^r + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall u \in \mathbb{R},$$

$(H2)$ $p : [0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ est continûment dérivable, $q : [0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ avec $\frac{1}{p},\ q \in L^1(0,+\infty)$, et

$$M_1 = \left(\int_0^{+\infty} \Big(\int_x^{+\infty} \frac{ds}{p(s)} \Big) dx \right)^{\frac{1}{r+1}} < +\infty,$$

$$M_2 = \left(\int_0^{+\infty} q(x) \Big(\int_x^{+\infty} \frac{ds}{p(s)} \Big)^{\frac{r+1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{r+1}} < +\infty,$$

$(H3)$ $f(x,0) = 0$ et $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(x,u)}{u^r} = +\infty$, uniformément pour $x \in [0,+\infty)$.

Dans ce cas là, alors il exixte un réel $\bar{\lambda} > 0$, où le problème (1) a au moins une solution non trivial u_λ pour chaque $\lambda \in \left(0, \bar{\lambda}\right)$ qui vérifie :

$$\int_0^{+\infty} \Big(p(x)u'(x)v'(x) \Big) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x,u) v(x) dx = 0,$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(0,+\infty)$, c'est-à-dire, $\langle J'(u_\lambda), \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in H_0^1(0,+\infty)$. Ainsi que u_λ est un point critique de la fonctionelle J, qui est une solution faible (classique) de notre problème. Pour la démonstration, on a utilisé quelques lemmes et corollaire nécessaires ainsi que le principe variationnel d'Ekeland.

CHAPITRE 1

QUELQUES OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

1.1 Espaces Normés, Banach et de Hilbert

1.2 Opérateurs linéaires bornés

1.3 Méthodes variationnelles et théorie des points critiques

1.4 Principe variationnel d'Ekeland

Le premier chapitre est consacré à quelques outils d'analyse fonctionnelle à utiliser tout au long de ce travail, à savoir les espaces normés, Banach et de Hilbert, les opérateurs linéaires bornés (la continuité et la différentiability), Méthodes variationnelles et théorie des points critiques, et le principe variationnel d'Ekeland..

1.1 Espaces Normés, Banach et de Hilbert

Définition 1.1. (Espaces Normés) Un espace vectoriel X est dit être un espace normé si à chaque $x \in X$ il est associé un nombre réel non négatif $\|x\|$, appelé la norme de x, tels que nous avons

(a) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tous les x et y dans X,
(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ si $x \in X$ et α est un scalaire,
(d) $\|x\| > 0$, si $x \neq 0$.

Remarque 1.1. Ici, le scalaire est un nombre qui peut appartenir à l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Chaque espace normé peut être considéré comme un espace métrique où la fonction de distance $dist(x;y) \equiv d(x;y)$ (la distance entre x et y) est donné par $\|x-y\|$ et satisfait :

(a) $0 \leq d(x,y) < +\infty$ pour tous les x et y dans X,
(b) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(c) $d(x,y) = d(y,x)$ pour tous les x et y dans X,
(d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ pour tous les $x,\ y$ et z dans X.

Exemples 1.1. Voici quelques exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

(a) $\|x\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$,
(b) $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{i=n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, pour tout $p \geq 1$
(c) $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, ...|x_n|\Big)$, si $p = \infty$.

Définition 1.2. (Suite de Cauchy) Une suite $\{u_n\}$ dans X est appelée une suite de Cauchy (dans la norme $\|.\|$) si pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tous $m \geq n > N$, on a

$$\|u_m - u_n\| < \varepsilon.$$

Définition 1.3. (Espaces de Banach) Un espace vectoriel normé est dit complet si toutes les suites de Cauchy de l'espace vectoriel convergent. Espaces vectoriels normés complets sont appelés espaces de Banach.

Pour définir un espace de Hilbert, nous avons besoin de la notion d'espace de produit scalaire (voir [19]).

Définition 1.4. (Produit scalaire) Un produit scalaire sur un espace vectoriel X est une forme sesquilinéaire définie positive, à savoir une fonctionnelle $\langle .,. \rangle :\ X \times X \to \mathbb{R}$, telle que pour tous $x, y, z \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

(a) $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

(b) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$
(c) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$
(d) $\langle x, x\rangle \geq 0$, et $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Proposition 1.1. *[19] Le produit scalaire est continu.*

Démonstration. Soit $x_n \to x$ et $y_n \to y$, alors comme y_n sont bornés, nous avons

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \to 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la prise de limites commute avec le produit scalaire

$$\lim_{n\to+\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle \lim_{n\to+\infty} x_n, \lim_{n\to+\infty} y_n\rangle.$$

□

Définition 1.5. (Espaces de Hilbert) Un espace de Hilbert est un espace de produit scalaire qui est complet comme un espace métrique, et noté H.

1.2 Opérateurs linéaires bornés

Soit X et Y, deux espaces de Banach normés.

Définition 1.6. (Opérateur linéaire borné)[17] Soit A un opérateur linéaire, tel que $D(A) = X$ et $R(A) \subset Y$. On dit que A est borné, s'il est borné sur la boule unité $\bar{B}(0, 1)$. C'est-à-dire, si l'ensemble

$$\{\|Ax\|, \quad \|x\| \quad \leq 1\}$$

est borné.

Conformément à cette définition, si A est borné, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout x avec $\|x\| \leq 1$, on a l'inégalité

$$\|Ax\| \leq c.$$

Théorème 1.1. *[17] A est borné, si est seulement si, il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\|Ax\| \leq c\|x\|,$$

pour tout $x \in X$.

Définition 1.7. (Convergence faible) On dit qu'une suite $(x_n) \in X$ converge faiblement vers x, si

$$pour\ tout\ f \in X^{'},\ \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle,$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.2. *[7] Soit (x_n) une suite de X. On a*

1. *Si $x_n \longrightarrow x$, alors $x_n \rightharpoonup x$.*
2. *Si $x_n \rightharpoonup x$, alors (x_n) est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

Proposition 1.3. *[7] Lorsque X est de dimension finie, une suite (x_n) converge faiblement, si et seulement si, elle converge fortement.*

Définition 1.8. (Espace dual)[16] L'ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé constitue un espace vectoriel. On l'appelle dual de l'espace X et on note $X^{'}$.
On munit $X^{'}$ de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} \mid \langle f, x \rangle \mid, \quad \forall f \in X^{'}.$$

$X^{'}$ muni de cette norme est un espace de Banach et on a l'inégalité

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X, \quad \forall f \in X^{'}, \quad \forall x \in X.$$

Définition 1.9. (**Réfléxivité**) Soit X un espace de Banach et soit **i** l'injection canonique de X dans $X^{''}$. On dit que X est réflexif, si $\mathbf{i}(X) = X^{''}$, où $X^{''}$ est le bidual de X.

Définition 1.10. (**Séparabilité**) Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est séparable si X admet une partie dénombrable et dense.

Théorème 1.2. *[7] Un espace de Banach X est réflexif, si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.*

Corollaire 1.1. *[7] Si X est un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\| \leq M$ contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\| \leq M$.*

1.2.1 Continuité et compacité des opérateurs

On va considérer des opérateurs T de X dans Y et on va donner une définition concernant les propriétés de la continuité de T.
La notion plus simple est la suivante

Définition 1.11. L'opérateur $T : X \to Y$ est dit continu en x, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $T(x_n)$ converge vers $T(x)$.
T est dit continu sur $\Omega \subset X$ si T est continu en tout point $x \in \Omega$.

Définition 1.12. Un opérateur $T : X \to Y$ est dit compact s'il est continu et a la propriété. Pour toute suite (x_n) bornée dans X, la suite $(T(x_n))$ admet une sous suite convergente.

Définition 1.13. Soit $(X, \|.\|_1)$ et $(Y, \|.\|_2)$ deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \to Y$ est dit complètement continu s'il est continu et l'image de tout ensemble borné de X est relativement compact dans Y.

1.2.2 L'injections continus et compacts

L'injection définissent les relations qui existent entre différents espaces fonctionnels. Ils sont très importants dans l'analyse moderne et les problèmes aux limites.

Définition 1.14. Soient X et Y deux espaces de Banach. On dit que X est injecté dans Y et on écrit $X \hookrightarrow Y$, si pour tout $x \in X$ on a $x \in Y$ et $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, où la constante c ne dépend pas de $x \in X$. On définit l'opérateur d'injection $i : X \to Y$, qui nous permet de considérer le même élément $x \in X$ comme un élément de Y.
$X \hookrightarrow Y$ est équivalent à dire que l'opérateur d'injection $i : X \to Y$ est un opérateur linéaire continu.
Si $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, pour tout $x \in X$ alors $\|i(x)\|_Y \leq c$ si $\|x\|_X \leq 1$.

Définition 1.15. Si $X \hookrightarrow Y$ et l'opérateur d'injection $i : X \to Y$ est un opérateur compact, alors on dit que X est injecté de manière compacte dans Y, et on écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$. La compacité de l'opérateur $i : X \to Y$ est équivalent à dire que tout sous-ensemble borné de X est un sous-ensemble compact de Y.

1.2.3 Semi-continuité

Définition 1.16.

1. On dit qu'une fonctionnelle $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement $(s.c.i)$ au point x_0, si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \to x_0$, on a
$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$
2. On dit que f est semi-continue supérieurement $(s.c.s.)$ au point x_0, si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \to x_0$, on a
$$f(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Exemple 1.1. 1. Soit la fonctionnelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ x > 0. \end{cases}$$

Alors f est semi-continue inférieurement $(s.c.i.)$ à $x_0 = 0$ mais n'est pas semi-continue supérieurement.

2. Soit la fonctionnelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

Alors f est semi-continue supérieurement $(s.c.s.)$ à $x_0 = 0$ mais n'est pas semi-continue inférieurement.

Définition 1.17. 1. Une fonctionnelle $f : X \to \mathbb{R}$ est dite faiblement semi-continue inférieurement $(f.s.c.i.)$ au point x_0, si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

2. On dit que f est faiblement semi-continue supérieurement $(f.s.c.s.)$ au point x_0, si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Exemple 1.2. Soit la fonctionnelle J définie sur un espace de Hilbert H comme suit

$$J : u \to \|u\|^2,$$

alors J est faiblement semi-continue inférieure $(f.s.c.i.)$. En effet, soit (u_n), telle que $u_n \rightharpoonup u$, on montre que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^2.$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= (u_n - u, u_n - u) \\ &= \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

et comme $\mathcal{H}' = H$ et $u_n \rightharpoonup u$, donc

$$\forall u \in H : (u_n, u) \to (u, u) = \|u\|^2.$$

Alors

$$\|u_n\|^2 \geq \|u\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

il résulte que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^2.$$

Remarque 1.2. 1. Il est facile de voir que si f est continue en x_0, alors f est $(s.c.s.)$ et $(s.c.i)$ et inversement.

2. Si f est faiblement continue en x_0, alors f est $(f.s.c.s.)$ et $(f.s.c.i.)$ et inversement.

1.2.4 Opérateurs différentiables

Dans la suite on donne quelques définitions et propriétés fondamentaux conciste l'opérateurs différentiables. Soient X et Y deux espaces de Banach, U un ouvert de X.

Définition 1.18. (La dérivée au sens de Fréchet) Soit $u \in U$ et $F : U \to Y$. On dit que F est différentiable au point u s'il existe une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que si on considère

$$R(h) = F(u+h) - F(u) - A.h, \text{ pour } h \in X, \text{ petit.}$$

Alors

$$\frac{R(h)}{\|h\|} \to 0 \text{ lorsque } \|h\| \to 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \|h\|_X \ \leq \delta, \text{ alors } \|R(h)\|_Y \ \leq \varepsilon \|h\|_X.$$

Si une telle application $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe, elle est forcément unique. On note par

$$A = dF(u).$$

Elle est appelée différentielle (au sens de Fréchet) de F en u, ou encore application linéaire tangente à F en u. En l'absence de précision supplémentaire différentiable signifiera dans la suite différentiable au sens de Fréchet.

Exemples 1.2. 1. Si $F(u) = c$. Alors F Fréchet différentiable et

$$dF(u) = 0, \ \forall u.$$

2. Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ $A(u+h) - A(u) = A.h$ et donc $dA(u) = A, \ \forall u \in X$.

3. La fonctionnelle $F : H \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$F(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}\langle u, u\rangle,$$

est Fréchet différentiable et

$$dF(u)h = \langle u, h\rangle.$$

4. La fonctionnelle $F : H \to \mathbb{R}^+$
$$F(u) = \|u\|,$$
est Fréchet différentiable pour $u \neq 0$ et
$$dF(u)h = \frac{\langle u, h \rangle}{\|u\|}.$$
On a ensuite toutes les propriétés classiques.

Proposition 1.4. *[14]*

i) *Soit F et G deux applications de U vers Y. Si F et G sont différentiables en $u \in U$. Alors $\forall \lambda, \mu$ réels $\lambda F + \mu G$ est différentiable en u, et*
$$d(\lambda F + \mu G)(u) = \lambda dF(u) + \mu dG(u).$$

ii) *Soit X, Y et Z trois espaces de Banach, U un ouvert de X, et V un ouvert de Y. Soit $F : U \to Y$ et $G : V \to Z$, tels que $F(U) \subset V$. Si F est différentiable en u et G est différentiable en $v = F(u)$, alors $G \circ F$ est différentiable en u et*
$$d(G \circ F)(u) = dG(v) \circ dF(u), \quad v = F(u),$$
c'est-à-dire
$$d(G \circ F)(u)h = dG(v)[dF(u)h].$$
La différentielle de $G \circ F$ est donc la composition des applications linéaires continues $dF(u)$ et $dG(v)$, pour $v = F(u)$.

Définition 1.19. (Dérivée directionnelle) Soit $F : U \to Y$, $u \in U$. Soit $v \in X$, $v \neq 0$. On appelle dérivée directionnelle en u de F dans la direction v, notée $\partial_v F(u)$, la limite lorsqu'elle existe.
$$\partial_v F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}.$$
La notion de dérivée directionnelle est donc une extension de la notion de dérivée partielle. Si F est Fréchet différentiable, alors pour tout $v \in X$ la dérivée directionnelle dans la direction v est donnée par
$$\partial_v F(u) = dF(u)v.$$
En effet,
$$F(u + tv) = F(u) + dF(u)(tv) + R(tv).$$
Donc
$$\frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = dF(u)(v) + \frac{R(tv)}{t},$$
$$\frac{R(tv)}{t} \to 0, \quad lorsque\ t \to 0.$$

Définition 1.20. (Différentiabilité au sens de Gâteaux) On dit que $F : U \to Y$ est Gâteaux différentiable en u (G-différentiable en u), s'il existe une application linéaire continue A de X vers Y, c'est-à-dire $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que pour tout $v \in X$, la dérivée directionnelle de F en u dans la direction v existe et est égale à $A(v)$, c'est-à-dire

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = A(v), \quad t \to 0, \ \forall v \in X.$$

On vérifie alors que, si une telle application A existe, elle est unique. On note

$$A = d_G F(u).$$

Proposition 1.5. *[14] Si F est Fréchet différentiable en u, elle est Gâteaux différentiable en u et*

$$\partial_G F(u) = dF(u).$$

La réciproque est fausse en général, même en dimension finie.

Exemple 1.3. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right)^2, & si\ y \neq 0 \\ 0, & si\ y = 0. \end{cases}$$

est G-différentiable à $(0, 0)$, mais pas différenciable au sens de Frechet à $(0, 0)$.

Remarque 1.3. La G-différentiabilité n'implique pas la continuité de F.

Exemple 1.4. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & si\ y = x^2 \\ 0, & si\ y \neq x^2. \end{cases}$$

est G-différentiable à $(0, 0)$, mais n'est pas continue à $(0, 0)$, (alors que bien entendu la différentiabilité au sens de Fréchet l'implique).
Tandis que, si on sait que F est C^1 au sens de Gâteaux, alors F est Fréchet différentiable sur U et les deux notions coïncident et on a

Théorème 1.3. *[14] Soit $F : U \to Y$ une application G-différentiable (U ouvert de X). On suppose que l'application $v \mapsto d_G F(v)$ est continue sur U. Alors F est Fréchet différentiable sur U et*

$$dF(v) = d_G F(v), \quad \forall v \in U.$$

Démonstration. Soit $r \in]0,1]$ tel que $B_r(u) \subset U$. Puisque $d_G F : U \to X'$ est continue à u, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta \in]0,1]$ tel que

$$\|d_G F(u+tv) - d_G F(u)\| < \varepsilon \quad \text{pour } \|v\| < \delta,\ |t| < 1. \tag{1.1}$$

D'autre par, pour chaque $v \in B_r(0)$ la fonction

$$t \in [0,1] \mapsto (d_G F(u+tv), v),$$

est la dérivée de la fonction

$$g(t) = F(u+tv) \quad t \in [0,1].$$

Par conséquent

$$\int_0^1 (d_G F(u+tv), v)dt = g(1) - g(0) = F(u+v) - F(u).$$

Donc

$$F(u+v) - F(u) - (d_G F(u), v) = \int_0^1 (d_G F(u+tv) - d_G F(u), v)dt. \tag{1.2}$$

Soit

$$R(u,v) = \int_0^1 (d_G F(u+tv) - d_G F(u), v)dt.$$

D'après (1.1), pour tout $v \in B_\delta(0)$, nous avons que

$$\begin{aligned} \|R(u,v)\| &\leq \int_0^1 \|d_G F(u+tv) - d_G F(u)\| \|v\| dt \\ &\leq \varepsilon \|v\|. \end{aligned}$$

Pour cette raison $R(u,v) = o(\|v\|)$ quand $\|v\| \to 0$. Ensuite, (1.2) montre que $d_G F(u)$ est le dérivé de Fréchet de F à u. □

Remarque 1.4. En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux. Si on veut prouver que F est C^1, il suffit donc de prouver qu'elle est Gâteaux différentiable, puis de vérifier que la différentiable $d_G F$ est continue.

1.3 Méthodes variationnelles et théorie des points critiques

Soit (E) une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles), on veut l'étudier par une méthode variationnelle. Les solutions sont alors cherchées comme points critiques d'une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach X bien précis telle que :

***i*)** J est au moins Gateaux-différentiable.

***ii*)** L'équation d'Euler correspondante : $d_G J(u) = 0$ est équivalente à (E).

Dans le cas où J est minorée (respectivement majorée), il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum (respectivement le maximum) est atteint.

1.3.1 Points et valeures critiques

Proposition 1.6. *[14] Soit X un espace de Banach, et J une application de X vers $\mathbb{R}$, soit $u \in X$. On suppose que*

$$J(u) = \inf_{v \in X} J(v),$$

c'est-à-dire

$$J(u) \leq J(v), \ \forall v \in X.$$

Alors, si J est Gâteaux-différentiable en u, on a

$$d_G J(u) = 0.$$

Démonstration. Sous l'hypothèse de ce proposition, supposons sans perte de généralité que u_0 est un point minimum (sinon considérons la fonction $-J$ au lieu de J).
Comme $u_0 \in U$ et U est ouvert, il existe un nombre réel positif r tel que la boule ouverte $B_r(u_0)$ est contenu dans U.
Maintenant, soit $h \in X \setminus \{0\}$. Alors, pour chaque t tel que

$$|t| \leq \frac{r}{\|h\|}, \quad \text{on a,} \quad J(u_0 + th) \geq J(u_0),$$

et ainsi par le Gâteaux différentiabilité de J à u_0, nous avons

$$d_G J(u_0)(h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}[J(u_0 + th) - J(u_0)] \geq 0.$$

Il s'ensuit également que $d_G J(u_0)(-h) \geq 0$, i.e., $d_G J(u_0)(h) \leq 0$, par linéarité de $d_G J(u_0)$.
Par conséquent $d_G J(u_0)(h) = 0$, pour tout $h \in X$ en effet. Ainsi $d_G J(u_0) = 0$. $\square$

Définition 1.21. Soit $u_0 \in X$. On dit que u_0 est un minimum local pour J si il existe $\delta > 0$ tel que

$$J(u_0) \leq J(v), \ \ \forall v \in B(u_0, \delta), \ \ v \neq u_0.$$

On a alors

Proposition 1.7. *[14] Soit $u_0 \in X$, un minimum local de J. Alors si J est Gâteaux différentiable en u_0, alors*

$$d_G J(u_0) = 0.$$

Définition 1.22. Soit J une fonctionnelle différentiable de X vers $\mathbb{R}$. Un point $u \in X$ est dit critique pour J ssi

$$dJ(u) = 0.$$

Définition 1.23. On appelle valeur critique, de la fonctionnelle J, de classe C^1 définie sur X, un nombre $c \in \mathbb{R}$, tel qu'il existe $u \in X$, tel que

$$J(u) = c, \quad dJ(u) = 0.$$

Pour les fonctionnelles convexes (ou espaces convexes), un résultat classique est donné par le théorème suivant

Théorème 1.4. *[16] Soit C un ensemble convexe fermé de X, Banach réflexif.*
Soit $J : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose

(i) *J coercive et $J \neq +\infty$, c'est-à-dire*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} J(u) = +\infty.$$

(ii) *J $(s.c.i)$ pour la convergence faible. Alors il existe $u \in C$, tel que*

$$J(u) = \inf_{v \in C} J(v) \ \ (< +\infty).$$

Si de plus J est Gâteaux-différentiable en u, alors $d_G J(u) = 0$.

1.3.2 Suite minimisante et infimum

Définition 1.24. (Suite minimisante) Une suite minimisante d'une fonctionnelle $J : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est une suite (x_n) telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in X} J(x)$$

Théorème 1.5. *[14] Soit X un espace de Banach réflexif, et J une fonctionnelle définie sur X, telle que*

1. *J est $(f.s.c.i)$,*
2. *la suite minimisante de J est bornée sur X,*

alors J atteint son infimum sur X.

1.3.3 Principe variationnel d'Ekeland

Soit X un espace métrique complet et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement. Si $(u_n)_n$ est une suite minimisante, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour $n > n_0$

$$J(u_n) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

On dit que $u = u_\varepsilon$ est un $\varepsilon-$ minimiseur de J si

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Le théorème d'Ekeland considère l'existence des points $\varepsilon-$ minimiseur.

Théorème 1.6. ***(principe variationnel d'Ekeland, forme forte 1974)**([11], [9])*
Soit (X, d) un espace métrique complet et $J : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement, et non identiquement égale à $+\infty$ ($J \not\equiv +\infty$). Soit $\varepsilon > 0$ et $u = u_\varepsilon \in X$ qui donne tel que

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$ il existe $v = v_\varepsilon \in X$ tel que
(a) $J(v) \leq J(u)$,
(b) $d(u, v) \leq \lambda$, *et*
(c) $J(v) < J(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(w, v)$, *pour tout* $w \in X \setminus \{v\}$.

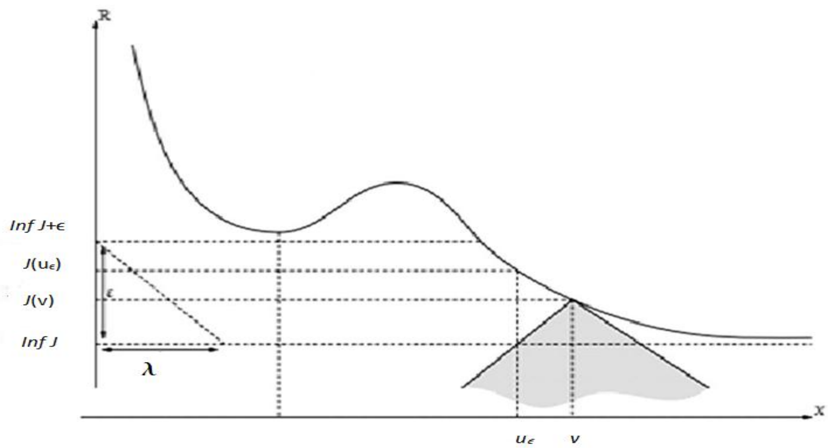
Théorème 1.7. ***(Principe variationnel d'Ekeland, forme faible 1979)**[9]*
Soit (X, d) est un espace métrique complet et soit $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle qui est semi-continu inférieur, bornée inférieurement. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in X$ qui satisfait

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon,$$

et chaque fois $w \in X$ avec $w \neq u_\varepsilon$, alors

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon d(u_\varepsilon, w).$$

FIGURE 1.1 – Principe variationnel Ekeland et $\varepsilon-$minimiseur



Corollaire 1.2. *([6], [18])*
Soit X est un espace de Banach $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle $(s.c.i.)$, bornée inférieurement et Gâteaux différentiable. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute $u_\varepsilon \in X$ tel que

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon,$$

il existe un point v dans X satisfaisant
(1) $J(v) \leq J(u_\varepsilon)$,
(2) $\|v - u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}$, *et*
(3) $\|J'(v)\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Démonstration. Les relations (1) et (2) sont évidemment les (a) et (b) dans principe variationnel d'Ekeland pour $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$, tandis que pour (3), de la relation (c) on a, pour tout $w \in X$ et tout $t > 0$,

$$\frac{1}{t}[J(v) - J(v + tw)] \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|.$$

Passant à la limite comme t tend vers 0, nous obtenons cela pour chaque w dans X

$$-\langle J'(v), w\rangle \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|.$$

Cela vaut aussi pour $-w$, alors

$$|\langle J'(v), w\rangle| \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|,$$

et alors

$$\|J'(v)\| \leq \sup_{\|w\|=1} |\langle J'(v), w\rangle| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

□

Remarque 1.5. Les relations (1) et (3) signifie que nous avons obtenu un (presque minimiseur) de J, qui est aussi un (presque point critique).

1.4 La condition de compacité de Palais-Smale

Définition 1.25. [18] Soit E un espace Banach et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. On dit que J satisfait la condition de Palais-Smale, notée $(P.S)$, s'il y a une suite (u_n) dans E telle que

$$(J(u_n)) \text{ bornée, et } \ J'(u_n) \to 0, \text{quand } \ n \to +\infty \tag{1.3}$$

admet une sous-suite convergente.
Toute suite satisfaisante (1.3) est appelée suite de Palais-Smale.

Définition 1.26. [18] Soit E un espace Banach et J une fonctionnelle de classe C^1, et $c \in \mathbb{R}$. On dit que la fonctionnelle J satisfait à la condition (locale) de Palais-Smale au niveau c, notée $(P.S)_c$, s'il y a une suite (u_n) dans E telle que

$$J(u_n) \to c, \text{et} \quad J'(u_n) \to 0, \tag{1.4}$$

admet une sous-suite convergente.

Exemple 1.5. Dans $\mathbb{R}$ la fonctionnelle $J : x \mapsto x^2$, satisfait la condition de Palais-Smale en 0 tandis que $J : x \mapsto e^{-x}$, ne la satisfait pas, car la suite définie par $u_n = n$ vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} -ne^{-n} = 0$ mais (u_n) n'admet pas une sous-suite convergente.

Remarque 1.6. La condition $(P.S)_c$ est une condition de compacité sur la fonctionnelle J, en ce sens que l'ensemble K_c de points critiques de J au niveau c,

$$K_c = \{u \in E : J(u) = c \ \text{ et } J'(u) = 0\}$$

est compact.

CHAPITRE 2

QUELQUES PROPRIÉTÉS UTILES DANS LES ESPACES DE LEBESGUE ET SOBOLEV

Dans le second chapitre, on s'intéresse à démontrer quelques propéritées des injec- tions continues et compacts dans l'espace de Hilbert , en siute on definie l'espace de Lebesgue et donner quelques théorémes impertantes, de méme on parle au l'espace de Soboleve,enfin,on presente la théoréme de compacité .

2.1 Espace de Lebesgue et Sobolev

Dans la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

2.1.1 Espace de Lebesgue L^p

Définition 2.1. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty\}.$$

On note $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, et $\|.\|_{L^p}$ est une norme.

Définition 2.2. On pose

$$L^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C : |f(x)| \ \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^{\infty}} = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Théorème 2.1. ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)****[7] Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que*

(a) *$(f_n(x)) \to f(x)$ p.p. Sur Ω.*

(b) *Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$, telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. Sur Ω. Alors*

$$f \in L^1(\Omega) \ \textit{ et } \ \|f_n - f\|_{L^1} \to 0, \ n \to \infty.$$

Théorème 2.2. *[7] L'espace L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$, et son dual est L^q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

2.1.2 Espace de SobolevH^1

Définition 2.3. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ i = 1, ..., N\right\}$$

où $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens distribution de v.
L'espace $H^1(\Omega)$ est équipé du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left(uv + \Sigma_{i=1}^{i=N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx$$

et la norme correspondante

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \Big[\int_\Omega \Big(v^2 + \Sigma_{i=1}^{i=N} \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i} \Big)^2 \Big) dx \Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 2.1. Par définition de la dérivée distributionnelle, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $v \in H^1(\Omega)$
2. $v \in L^2(\Omega)$ il existe $g_1, g_2, ..., g_N \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int\limits_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int\limits_\Omega g_i \varphi dx.$$

Alors, par définition, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = g_i$ au sens de la distribution.

Définition 2.4. On désigne par $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Notons ici que la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ est $H_0^1(\Omega)$ (avec en général $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$), Alors que la fermeture de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est $H^1(\Omega)$.

Proposition 2.1. *Soit $u \in H^1(\Omega)$. La fonction u appartient à $H_0^1(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$.*
En particulier, si $\Omega =]0; 1[$, et $u \in H_0^1(\Omega)$, Alors $u(0) = u(1) = 0$. Par ailleurs,

$$H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Théorème 2.3. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)**[7] Soit f et $g \in L^2(\Omega)$. Alors, nous avons que*

$$\int\limits_\Omega |fg| \leq \Big(\int\limits_\Omega |f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_\Omega |g|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 2.4. ***(Inégalité de Hölder)**[7] Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on note q l'exposant conjugué, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Suppose que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors*

(i) *$fg \in L^1(\Omega)$ et*

(ii) $\int\limits_\Omega |fg| \leq \Big(\int\limits_\Omega |f|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_\Omega |g|^q \Big)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q.$

2.1.3 Lemme de compacité

Lemme 2.1. ***(C. Corduneanu)**[1] Soit $D \subset C_l([0,+\infty),\mathbb{R})$ un ensemble borné. Alors D est relativement compact si les conditions suivantes sont vérifiées :*
***(a)** D est équicontinu sur tout sous-intervalle compact de $\mathbb{R}^+$, i.e.*

$$\forall\, J \subset [0,+\infty) \;\; compact, \forall\, \varepsilon > 0,\; \exists\, \delta > 0,\; \forall\, x_1, x_2 \in J :$$
$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |u(x_1) - u(x_2)| \leq \varepsilon, \forall\, u \in D,$$

***(b)** D est équiconvergent à $+\infty$ i.e.,*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, T = T(\varepsilon) > 0 \textit{ tel que}$$
$$\forall\, x : x \geq T(\varepsilon) \Longrightarrow |u(x) - u(+\infty)| \leq \varepsilon,\; \forall\, u \in D.$$

2.2 Les injections continues et compects dans l'espace $H^1(0,+\infty)$

On définit l'espace

$$H^1_{0,p}(0,+\infty) = \{u \in AC([0,+\infty),\mathbb{R}) \mid\; u(0) = u(+\infty) = 0,\; \sqrt{p}u' \in L^2[0,+\infty)\}.$$

Lemme 2.2. *([24]) $H^1_{0,p}(0,+\infty)$ s'injecter de manière continue dans $L^2(0,+\infty)$.*

Démonstration. Pour $u \in H^1_{0,p}(0,+\infty)$, on a

$$|u(t)| = \left|\int_t^{+\infty} u'(s)ds\right| = \left|\int_t^{+\infty} \sqrt{p(s)}u'(s)\frac{1}{\sqrt{p(s)}}ds\right|.$$

Alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 &\leq \left(\int_t^{+\infty} p(s)u'^2(s)ds\right)\left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{p(s)}ds\right) \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} p(s)u'^2(s)ds\right)\left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{p(s)}ds\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt \leq \left(\int_0^{+\infty} (\int_t^{+\infty} \frac{1}{p(s)}ds)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} p(s)|u'(s)|^2 ds\right),$$

C'est à dire

$$\|u\|_{L^2} \leq \sqrt{M}\|\sqrt{p}u'\|_{L^2}.$$

□

On remarquez que $H^1_{0,p}(0,+\infty)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{0,p} = \sqrt{\int_0^{+\infty} p(t)u'^2(t)dt + \int_0^{+\infty} u^2(t)dt},$$

ou la norme équivalente

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^2} + \|\sqrt{p}u'\|_{L^2}.$$

De plus l'espace $H^1_{0,p}(0,+\infty)$ est réflexif. Nous avons :

Lemme 2.3. *([40]) Soient X et Y des espaces vectorialles normés isométriquement isomorphes. Si Y est réflexif, alors X est réflexif.*

Démonstration. Voir [40] page 160. □

Lemme 2.4. *([24])* ***(a)*** *L'opérateur*

$$\begin{array}{rcl} T : H^1_{0,p}(0,+\infty) & \longrightarrow & T(H^1_{0,p}(0,+\infty)) \subset L^2(0,+\infty) \times L^2(0,+\infty) : \ = L^2_2(0,+\infty) \\ u & \longrightarrow & T(u) = (u, \sqrt{p}u') \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique.
(b) $H^1_{0,p}(0,+\infty)$ *est un espace réflexif.*

Démonstration. (a) Il est clair que T est un opérateur linéaire et que T conserve les normes, c'est-à-dire,

$$\forall\, u \in H^1_{0,p}(0,+\infty), \quad \|Tu\|_{L^2_2} = \|u\|_p.$$

En effet

$$\begin{array}{rcl} \|Tu\|_{L^2_2} & = & \|(u, \sqrt{p}u')\|_{L^2_2} \\ & = & \|u\|_{L^2} + \|\sqrt{p}u'\|_{L^2} \\ & = & \|u\|_p. \end{array}$$

(b) Puisque $L^2(0,+\infty))$ est un espace de Banach réflexif, le produit cartésien $L^2_2(0,+\infty))$ est aussi un espace de Banach réflexif par rapport à la norme

$$\|u\|_{L^2_2} = \|u_1\|_{L^2} + \|u_2\|_{L^2}, \quad \text{où} \ \ u = (u_1,u_2) \in L^2_2(0,+\infty).$$

D'après la partie (a), $T(H^1_{0,p}(0,+\infty))$ est un sous-espace fermé de $L^2_2(0,+\infty)$; puis par [40, Théorème 4.10.5], l'espace $T(H^1_{0,p}(0,+\infty))$ est réflexif. Par conséquent $H^1_{0,p}(0,+\infty)$ est aussi réflexif (voir [40, Lemme 4.10.4]). □

Lemme 2.5. *([24]) Sur $H^1_{0,p}(0,+\infty)$, la quantité $\|u\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} p(t)u'^2(t)dt}$ est une norme qui équivaut à la norme de $H^1_{0,p}(0,+\infty)$.*

Démonstration. Étant donné $u \in H^1_{0,p}(0,+\infty)$, Si on voir le lemme 2.2, on a

$$\int_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt \leq M\|u\|^2.$$

Alors,

$$\int_0^{+\infty} p(t)u'^2(t)dt \leq \int_0^{+\infty} \left(u^2(t) + p(t)u'^2(t)\right) dt \leq (1+M)\int_0^{+\infty} p(t)u'^2(t)dt,$$

C'est à dire

$$\|u\| \leq \|u\|_{0,p} \leq \sqrt{1+M}\|u\|.$$

□

Lemme 2.6. *([24]) $(H^1_{0,p}(0,+\infty), \|\cdot\|)$ s'injecter de manière continue dans $(C_0[0,+\infty), \|u\|_\infty)$, où $C_0[0,+\infty) = \{u \in C([0,+\infty),\mathbb{R}) \mid \lim_{t\to+\infty} u(t) = 0\}$ et $\|u\|_\infty = \sup_{t\in[0,+\infty)} |u(t)|$.*

Démonstration. Pour $u \in H^1_{0,p}(0,+\infty)$, on a

$$\begin{aligned} |u(t)| = |u(t) - u(0)| &= \left|\int_0^t u'(s)ds\right| = \left|\int_0^t \sqrt{p(s)}u'(s)\frac{1}{\sqrt{p(s)}}ds\right| \\ &\leq \left(\int_0^t p(s)u'^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{1}{p(s)}ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} p(s)u'^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{p(s)}ds\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|u\|_\infty \leq \sqrt{\left\|\frac{1}{p}\right\|_{L^1}}\|u\|.$$

□

Corollaire 2.1. *([24]) $H^1_{0,p}(0,+\infty)$ s'injecter de manière continue dans $C_0[0,+\infty)$ et dans $L^2(0,+\infty)$.*

Pour prouver que $H^1_{0,p}(0,+\infty)$ s'injecter de manière compacte dans $C_0[0,+\infty)$, nous appliquons la critère de compacité de Corduneanu (voir Lemme 2.1 et [1]).

Lemme 2.7. *([24]) L'injection*

$$H^1_{0,p}(0,+\infty) \hookrightarrow C_0[0,+\infty)$$

est compact.

Démonstration. Soit $D \subset H^1_{0,p}(0,+\infty)$ un ensemble borné, alors il est borné dans $C_0[0,+\infty)$ par Lemme 2.6. Soit $R > 0$ tel que pour tout $u \in D$, $\|u\| \leq R$. on a. (a) D est équicontinu sur tout intervalle compact de $[0,+\infty)$. Pour $u \in D$ et $t_1, t_2 \in [0,+\infty)$, on a

$$\begin{aligned}
|u(t_1) - u(t_2)| &= \left| \int_{t_2}^{t_1} u'(\tau) d\tau \right| = \left| \int_{t_2}^{t_1} \sqrt{p(\tau)} u'(\tau) \frac{1}{\sqrt{p(\tau)}} d\tau \right| \\
&\leq \left(\int_{t_2}^{t_1} \frac{1}{p(\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|u\| \\
&\leq R \left(\int_{t_2}^{t_1} \frac{1}{p(\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

et le membre de droite tend vers 0 lorsque $|t_1 - t_2| \to 0$ pour $\frac{1}{p} \in L^1(0,+\infty)$ (par le théorème de convergence dominée de Lebesgue).
(b) D est équiconvergent. Pour $t \in [0,+\infty)$ et $u \in D$, en utilisant le fait que $u(+\infty) = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
|u(t) - u(+\infty)| &= |u(t)| \\
&= \left| \int_{t}^{+\infty} u'(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \left(\int_{t}^{+\infty} \frac{1}{p(\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t}^{+\infty} p(\tau) u'^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{t}^{+\infty} \frac{1}{p(\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|u\| \\
&\leq R \left(\int_{t}^{+\infty} \frac{1}{p(\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0, \text{ quand } t \to +\infty.
\end{aligned}$$

Le résultat découle alors du lemme 2.1. □

Chapitre 3

Resultats d'existence pour un problème d'ordre deux sous-linéaire sur la demi-droite par méthode variationnelles

3.1 Introduction

3.2 Résultat principal

3.3 Example

Dans ce chapitre, nous présenterons un application de le principe variationnel d'Ekeland pour résolution d'équations différentielles et nous choisirons comme exemple l'article qui a été publié par les auteurs D. Bouafia, John R. Graef et T. Moussaoui en 2018 (voir [2]). C'est un bon exemple pour étudé l'existence de solutions à un problème aux limites du second ordre.

3.1 Position de problème

Nous considérons le problème,

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' = \lambda q(x) f(x, u(x)), \quad x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et λ est un paramètre positif.
Les problèmes aux limites avec des conditions de Dirichlet sont un domaine de la théorie des équations différentielles en développement rapide. Des problèmes de ce type se posent dans divers domaines de la physique, de la biologie, de la biotechnologie, etc. Ainsi, l'existence et la multiplicité des solutions du problèmes aux limites sur la demi-droite ont été étudiées par de nombreux auteurs. Ces résultats ont été obtenus en utilisant des techniques de sousolution et sursolution, la théorie du point fixe et la théorie des degrés topologiques, voir par exemple, [33], [25–28] et [32, 35, 37, 38]. Cependant, pour autant que nous le sachions, l'étude de solutions pour les problèmes aux limites du second ordre, éventuellement singuliers sur les intervalles infinis via des méthodes variationnelles a reçu beaucoup moins d'attention. Par exemple, voir [24] et [20, 21, 23, 31, 34]. Nous nous intéressons ici à l'existence de solutions pour un problème aux limites du second ordre avec l'opérateur de Sturm-Liouville sur la demi-droite ; on prend comme modèle un problème de Dirichlet. Nos résultats sont obtenus en appliquant la technique du principe variationnel d'Ekeland, et sous condition sublinéaire de la non-linéarité $f \in C([0, +\infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, avec un paramètre positif, le q pondéré a un signe constant sur toute la demi-droite, avec $q > 0$, pour $x \geq 0$. Nous donnons quelques nouveaux critères pour garantir que le problème (3.1) a au moins une solution classique. De plus, on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

$(H1)$ il existe des constantes $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et $r \in (0, 1)$ tel que

$$|f(x, u)| \leq a|u|^r + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall u \in \mathbb{R},$$

$(H2)$ $p : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ est de class C^1, $q : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ avec $\frac{1}{p}$, $q \in L^1(0, +\infty)$, et

$$M_1 = \left(\int_0^{+\infty} \Big(\int_x^{+\infty} \frac{ds}{p(s)} \Big) dx \right)^{\frac{1}{r+1}} < +\infty,$$

$$M_2 = \left(\int_0^{+\infty} q(x) \Big(\int_x^{+\infty} \frac{ds}{p(s)} \Big)^{\frac{r+1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{r+1}} < +\infty,$$

$(H3)$ $f(x,0)=0$ et $\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{f(x,u)}{u^r}=+\infty$, uniformément pour $x\in[0,+\infty)$.

3.2 Prliminaires

Soit l'espace $H^1_{0,p}(0,+\infty)$ défini par

$$H^1_{0,p}(0,+\infty)=\Big\{u\in AC([0,+\infty),\mathbb{R})|\ \sqrt{p}u'\in\ L^2(0,+\infty),\ u(0)=u(+\infty)=0\Big\},$$

muni par sa norme usurelle

$$\|u\|_p=\left(\int\limits_0^{+\infty}u^2(x)dx+\int\limits_0^{+\infty}p(x)u'^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$H^1_{0,p}(0,+\infty)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire suivant,

$$(u,v)=\int\limits_0^{+\infty}u(x)v(x)dx+\int\limits_0^{+\infty}p(x)u'(x)v'(x)dx\quad\forall u,v\in H^1_{0,p}(0,+\infty).$$

est un espace de Hilbert avec le produit scalaire suivant,

$$L^{r+1}_q(0,+\infty)=\Big\{u:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\text{ est mesurable, telle que }\int\limits_0^{+\infty}q(x)|u(x)|^{r+1}dx<+\infty\Big\},$$

équipé par la norme usuelle

$$\|u\|_{r+1,q}=\left(\int\limits_0^{+\infty}q(x)|u(x)|^{r+1}dx\right)^{\frac{1}{r+1}}.$$

On considère aussi l'espace

$$C_0[0,+\infty)=\Big\{u\in C([0,+\infty),\mathbb{R})\ \text{ such that }\ \lim_{x\to+\infty}u(x)=0\Big\}$$

muni par sa norme usurelle

$$\|u\|_\infty=\sup_{x\in[0,+\infty)}|u(x)|.$$

Nous avons également besoin aux lemmes et corollaires suivants.

Lemme 3.1. *$C_0[0,+\infty)$ s'injecte de manière continue dans $L_q^{r+1}(0,+\infty)$.*

Démonstration. Pour toute $u \in C_0[0,+\infty)$, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{r+1,q}^{r+1} &= \int_0^{+\infty} q(x)|u(x)|^{r+1}dx \\ &\leq \sup_{x\in[0,+\infty)} |u(x)|^{r+1} \int_0^{+\infty} q(x)dx, \end{aligned}$$

par conséquent, on obtient $\|u\|_{r+1,q} \leq C\|u\|_\infty$, où $C = \|q\|_{L^1}^{\frac{1}{r+1}}$. □

Lemme 3.2. *$H_{0,p}^1(0,+\infty)$ s'injecte de manière continue dans $L_q^{r+1}[0,+\infty)$.*

Démonstration. Pour tous $u \in H_{0,p}^1(0,+\infty)$, on a

$$\begin{aligned} |u(x)|^{r+1} = \Big|u(+\infty) - u(x)\Big|^{r+1} &= \Big| \int_x^{+\infty} u'(s)ds\Big|^{r+1} \\ &= \Big| \int_x^{+\infty} \sqrt{p(s)}u'(s)\frac{1}{\sqrt{p(s)}}ds\Big|^{r+1} \\ &\leq \Big(\int_x^{+\infty} p(s)u'^2(s)ds\Big)^{\frac{r+1}{2}} \Big(\int_x^{+\infty} \frac{1}{p(s)}ds\Big)^{\frac{r+1}{2}}, \end{aligned}$$

donc, on obtient

$$\int_0^{+\infty} q(x)|u(x)|^{r+1}dx \leq \left(\int_0^{+\infty} p(s)u'^2(s)ds\right)^{\frac{r+1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} q(x)\Big(\int_x^{+\infty} \frac{1}{p(s)}ds\Big)^{\frac{r+1}{2}} dx\right),$$

ainsi, nous avons

$$\|u\|_{r+1,q} \leq M_2\|u\|.$$

□

Corollaire 3.1. *$H_{0,p}^1(0,+\infty)$ s'injecte de manière compact dans $L_q^{r+1}(0,+\infty)$, on note*

$$H_{0,p}^1 \hookrightarrow\hookrightarrow C_0 \hookrightarrow L_q^{r+1}.$$

Nous nous intéressons maintenant à la valeur propre principale λ_1 du problème non linéaire

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' = \lambda q(x)|u(x)|^r, & x \geq 0, \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

on note

$$\lambda_1 = \inf \Big\{ \int_0^{+\infty} p(x)u'(x)^2 dx : u \in H^1_{0,p} \setminus \{0\}, \int_0^{+\infty} q(x)|u(x)|^{r+1} dx = 1 \Big\}.$$

En suivant les mêmes étapes que dans la proposition 3.2 dans [36], et lemme 1.4 dans [3], on peut facilement établir le lemme suivant.

Lemme 3.3. λ_1 *est positif et est atteint pour une fonction positive* $\varphi_1 \in H^1_{0,p}(0,+\infty) \setminus \{0\}$.

Nous avons besoin de la technique suivante pour prouver notre résultat principal.

Théorème 3.1 (Principe variationnel d'Ekeland faible)**.** *([29]) Soit* (E, d) *un espace métrique complet et soit* $J : E \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle semi-continue inférieure, bornée inférieurement. Alors, pour chaque* $\varepsilon > 0$*, il existe* $u_\varepsilon \in E$ *avec*

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_E J + \varepsilon,$$

et pour chaque $w \in E$ *avec* $w \neq u_\varepsilon$*, alors*

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon d(u_\varepsilon, w).$$

3.3 L'existence de solutions

Pour obtenir l'existence de solutions du problème (3.1), on considère la fonctionnelle énergie $J : H^1_{0,p}(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ défini par

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)F(x,u(x))dx, \quad u \in H^1_{0,p}(0,+\infty),$$

où F désigne la primitive de f par rapport à sa deuxième variable, i.e. $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds.$

Proposition 3.1. *Supposons que les conditions* $(H1)$, $(H2)$ *soient vérifiées. Alors la fonctionnelle* J *est Fréchet dérivable sur* $H^1_{0,p}(0,+\infty)$. *De plus, on a*

$$\langle J'(u),v\rangle = \int_0^{+\infty} p(x)u'(x)v'(x)dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x,u(x))v(x)dx,\ \forall v \in H^1_{0,p}(0,+\infty).$$

Démonstration. Montrons d'abord que J est Gâteaux-différentiable. En effet, pour tout $v \in H^1_{0,p}(0,+\infty)$, et pour tout $t>0$, on a

$$\begin{aligned}
J(u+tv)-J(u) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} p(x)((u'+tv')(x))^2dx - \lambda\int_0^{+\infty} q(x)F(x,(u+tv)(x))dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} p(x)u'^2(x)dx + \lambda\int_0^{+\infty} q(x)F(x,u(x))dx \\
&= \frac{t^2}{2}\int_0^{+\infty} p(x)v'^2(x)dx + t\int_0^{+\infty} p(x)u'(x)v'(x)dx \\
&\quad - \lambda\int_0^{+\infty} q(x)\Big[F(x,(u+tv)(x)) - F(x,u(x))\Big]dx \\
&= \frac{t^2}{2}\int_0^{+\infty} p(x)v'^2(x)dx + t\int_0^{+\infty} p(x)u'(x)v'(x)dx \\
&\quad - t\lambda\int_0^{+\infty} q(x)f(x,(u+t\theta v)(x))v(x)dx,
\end{aligned}$$

où $0<\theta<1$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}[J(u+tv)-J(u)] &= \frac{t}{2}\int_0^{+\infty} p(x)v'^2(x)dx + \int_0^{+\infty} p(x)u'(x)v'(x)dx \\
&\quad - \lambda\int_0^{+\infty} q(x)f(x,(u+t\theta v)(x))v(x)dx.
\end{aligned}$$

Soit $t \to 0$, alors, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue et

$(H1)$, on a

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_0^{+\infty} p(x)u'(x)v'(x)dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x,u(x))v(x)dx, \quad \forall v \in H^1_{0,p}(0,+\infty).$$

Ensuite, nous montrons que J' est continue. En effet, soit $(u_n) \subset H^1_{0,p}(0,+\infty)$ avec $u_n \to u$, lorsque $n \to +\infty$, donc il existe $R > 0$ telle que $\|u_n\| \leq R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, de $(H1)$, $(H2)$ et Lemme 2.6 , on obtient

$$\begin{aligned} q(x)|f(x,u_n(x))| &\leq aq(x)|u_n(x)|^r + bq(x) \\ &\leq a \sup_{x\in[0,+\infty)} |u_n(x)|^r q(x) + bq(x) \\ &= (a\|u_n\|^r_\infty + b)q(x) \\ &\leq \left(a\Big(R\sqrt{\|\frac{1}{p}\|_{L^1}}\Big)^r + b\right) q(x) \in L^1(0,+\infty), \end{aligned}$$

par conséquent d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} q(x)f(x,u_n(x))dx = \int_0^{+\infty} q(x)f(x,u(x))dx.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \langle J'(u_n) - J'(u), v\rangle &= \int_0^{+\infty} p(x)u_n'(x)v'(x)dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x,u_n(x))v(x)dx \\ &- \int_0^{+\infty} p(x)u'(x)v'(x)dx + \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x,u(x))v(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} p(x)(u_n'(x) - u'(x))v'(x)dx \\ &- \lambda \int_0^{+\infty} q(x)(f(x,u_n(x)) - f(x,u(x)))v(x)dx, \end{aligned}$$

Par passage à la limite dans $\langle J'(u_n) - J'(u), v\rangle$, lorsque $n \to +\infty$, et tenue compte du fait que f est continue, on obtient $\quad J'(u_n) \to J'(u), \;$ comme $\; n \to +\infty$. □

Définition 3.1. On dit que $u \in H^1_{0,p}(0,+\infty)$ est une solution faible du problème (3.1), si pour tout $v \in H^1_{0,p}(0,+\infty)$, on a

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_0^{+\infty} p(x)u'(x)v'(x)dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x,u(x))v(x)dx = 0.$$

Remarque 3.1. Puisque le terme non linéaire f est continue, alors une solution faible du problème (3.1) est une solution classique.

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 3.2. *Supposons que $(H1)-(H3)$ soient vérifiées. Alors il existe $\overline{\lambda} > 0$ tel que le problème (3.1) a au moins une solution non triviale u_λ pour chaque $\lambda \in (0,\overline{\lambda})$.*

Démonstration. A partir de $(H1)$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$|F(x,u)| \leq a\frac{1}{r+1}|u|^{r+1} + b|u| \leq K|u|^{r+1} \quad \text{for all } \; |u| > \delta_1, \; \text{for some } K > 0.$$

Aussi, à partir de $(H1)$, il existe $M_3 > 0$ tel que

$$|F(x,u)| \leq M_3 \quad \text{pour tout } \; u \in [-\delta_1, \delta_1] \quad \text{et tout } x \in (0,+\infty).$$

Par conséquent,

$$|F(x,u)| \leq M_3 + K|u|^{r+1} \quad \text{pour tout } \; u \in \mathbb{R} \; \text{ et tout } \; x \in [0,+\infty). \tag{3.3}$$

A partir de (3.3) et $(H2)$, et en utilisant l'injection continue de $H^1_{0,p}(0,+\infty)$ dans $L^{r+1}_q(0,+\infty)$, c'est à dire $\|u\|_{r+1,q} \leq M_2\|u\|$, on a,

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)F(x,u(x))dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)\Big(M_3 + K|u|^{r+1}(x)\Big)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda M_3 \int_0^{+\infty} q(x)dx - \lambda K \int_0^{+\infty} q(x)|u|^{r+1}(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda M_3 \int_0^{+\infty} q(x)dx - \lambda K\|u\|^{r+1}_{r+1,q} \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda K M_2^{r+1}\|u\|^{r+1} - \lambda M_3\|q\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Fixons $R > 0$ (assez grand) et pour $u \in H^1_{0,p}(0,+\infty)$ avec $\|u\| \geq R$, on a

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\Big(KM_2^{r+1}\|u\|^{r+1} + M_3\|q\|_{L^1}\Big).$$

Notons que si $\lambda < \overline{\lambda} := \frac{R^2}{2(KM_2^{r+1}R^{r+1}+M_3\|q\|_{L^1})}$, cela donne l'existence d'un nombre réel $\rho > R$, satisfaisant

$$J(u) > 0, \quad \text{if } \|u\| = \rho, \quad \text{and} \quad \inf_{u\in\partial\overline{B}_\rho(0)} J(u) > 0, \tag{3.4}$$

et

$$J(u) \geq -C \ \text{ si } \ \|u\| \leq \rho, \ \text{pour certains } \ C > 0.$$

Puisque J est une fonctionnelle Fréchet dérivable, elle est donc semi-continue inférieure, et bornée inférieurement $\overline{B}_\rho(0)$.
Maintenant on montrer que,

$$\inf_{u\in\overline{B}_\rho(0)} J(u) < 0. \tag{3.5}$$

En effet. Soit $\varphi_1 \in H^1_{0,p}(0,+\infty)$ la fonction propre correspondant à la valeur propre principale du problème (3.2) comme définit dans le lemme 3.3. Alors, pour tout λ fixe dans $\left(0,\overline{\lambda}\right)$, par $(H3)$, pour tout D,

$$D > \frac{t^{1-r}\|\varphi_1\|^2}{2\lambda\|\varphi_1\|^{r+1}_{r+1,q}}, \tag{3.6}$$

il existe $0 < \epsilon_D < 1$ tel que

$$f(x,u) \geq Du^r \quad \text{for} \quad 0 < u < \epsilon_D.$$

Notons que puisque $0 < u < 1$, on obtient donc

$$f(x,u) \geq Du^r \quad \text{implique} \quad F(x,u) \geq Du^{r+1}. \tag{3.7}$$

Puisque la fonction φ_1 est continue sur $[0,+\infty)$ et $\varphi_1(0) = \varphi_1(+\infty) = 0$, il existe $\widehat{c} > 0$, such that $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \varphi_1(x) \leq \widehat{c}$. Ainsi, pour chaque $0 < t < \frac{1}{\widehat{c}}$, (t near 0) by using (3.6), (3.7) et Lemme 3.3 on a

$$\begin{aligned}
J(t\varphi_1) &= \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|^2 - \lambda\int_0^{+\infty} q(x)F(x,t\varphi_1(x))dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|^2 - \lambda Dt^{r+1}\int_0^{+\infty} q(x)\varphi_1^{r+1}(x)dx \\
&= \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|^2 - \lambda Dt^{r+1}\|\varphi_1\|^{r+1}_{r+1,q} < 0,
\end{aligned}$$

Alors (3.5) est prouvé. Par raccordement (3.4) avec (3.5), on obtient

$$\inf_{u\in\overline{B}_\rho(0)} J(u) < 0 < \inf_{u\in\partial\overline{B}_\rho(0)} J(u).$$

On définit sur $\overline{B}_\rho(0)$ une distance comme suit.

$$d(u,v) = \|u-v\| \quad \text{for } u,v\in\overline{B}_\rho(0).$$

Clairement, $\overline{B}_\rho(0)$ est un espace métrique complet. Il est connu que $J\in C^1(\overline{B}_\rho(0),\mathbb{R})$, donc J est semi-continue inférieurement et bornée inférieurementsur $\overline{B}_\rho(0)$. On pose que

$$c_\lambda = \inf\{J(u) : u\in\overline{B}_\rho(0)\}.$$

Par le principe variationnel d'Ekeland (voir Théorème 3.1) dans $\overline{B}_\rho(0)$, il existe une suite minimisante $(u_n)\subset\overline{B}_\rho(0)$, pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que

$$c_\lambda < J(u_n) \le \inf_{u\in\overline{B}_\rho(0)} J(u) + \frac{1}{n} \le c_\lambda + \frac{1}{n}, \tag{3.8}$$

$$J(u_n) \le J(w) + \frac{1}{n}\|w-u_n\|, \quad \forall w\in\overline{B}_\rho(0). \tag{3.9}$$

Si on met, $w = u_n + th$ dans (3.9), pour tout $t>0, \quad h\in H^1_{0,p}(0,+\infty)$, et $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, alors on obtient $J(u_n)\le J(u_n+th)+\frac{1}{n}t\|h\|$. Ainsi, nous avons

$$\frac{1}{t}[J(u_n)-J(u_n+th)] < \frac{1}{n}\|h\|,$$

et tenu compte que J est une fonctionnelle Fréchet dérivable, on voit que

$$-\langle J'(u_n),h\rangle \le \frac{1}{n}\|h\|, \ \text{ for all } n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},$$

si on met $w = u_n - th$, alors nous avons obtenu $\langle J'(u_n),h\rangle \le \frac{1}{n}\|h\|, \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Puis,

$$\sup_{\|h\|\le 1} |\langle J'(u_n),h\rangle| \le \frac{1}{n}, \ \text{ for all } n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Par conséquent, nous avons

$$\|J'(u_n)\|\to 0, \ \text{and} \ \ J(u_n)\to c_\lambda \quad \text{as } n\to+\infty,$$

où c_λ représente l'infimum de $J(u)$ sur $\overline{B}_\rho(0)$. D'après la discussion ci-dessus, nous savons que (u_n) est une suite $(P.S)_{c_\lambda}$ bornée (voir [30], Définition 2.3), et $\overline{B}_\rho(0)$ est un ensemble convexe fermé, et d'après corollaire 3.1, alors il existe $u_\lambda \in \overline{B}_\rho(0) \subset H^1_{0,p}(0,+\infty)$ et une sous-suite convergente encore notée (u_n), telle que

$$\begin{cases} u_n \to u_\lambda, & \text{weakly in } H^1_{0,p}(0,+\infty), \\ u_n(x) \to u_\lambda(x), & \text{p.p. dans } (0,+\infty), \\ u_n \to u_\lambda, & \text{fortement dans } L^{r+1}_q(0,+\infty). \end{cases}$$

Par conséquent, on passage à la limite en $\langle J'(u_n), v\rangle$, quand $n \to +\infty$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} p(x)u'_\lambda(x)v'(x)dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x,u_\lambda(x))v(x)dx = 0,$$

pour tout $v \in H^1_{0,p}(0,+\infty)$, à savoir $\langle J'(u_\lambda), v\rangle = 0$ pour tout $v \in H^1_{0,p}(0,+\infty)$.
Maintenant reste à montrer que $J(u_\lambda) = c_\lambda$. En effet, par (3.3) et lemme 2.6. Alors pour tout $x \in [0,+\infty)$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on obtient

$$\begin{aligned} q(x)|F(x,u_n(x))| &\le M_3 q(x) + Kq(x)|u_n(x)|^{r+1} \\ &\le M_3 q(x) + Kq(x) \sup_{x\in[0,+\infty)} |u_n(x)|^{r+1} \\ &\le M_3 q(x) + Kq(x)\|u_n\|_\infty^{r+1} \\ &\le \Big(M_3 + K\Big(\rho\sqrt{\|\frac{1}{p}\|_{L^1}}\Big)^{r+1}\Big)q(x) \in L^1(0,+\infty). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le théorème de convergence dominé du Lebesgue et (3.8), nous avons que

$$c_\lambda \le \lim_{n\to+\infty} J(u_n) = J(u_\lambda) \le c_\lambda.$$

Ainsi, c_λ est une valeur critique de la fonctionnelle J au point u_λ dans $H^1_{0,p}(0,+\infty)$. $\square$

3.4 Example

Nous considérons $f(x,u) = \frac{\ln(1+|u|^2)+|u|^{\frac{r}{2}}}{1+x^4}$, $q(x) = e^{-x}$ et $p(x) = e^{\frac{1}{2}x}$. Alors, nous obtenons

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall u \in \mathbb{R} : |f(x,u)| \le 2|u|^r + 1, \quad \text{pour tout} \quad r \in \Big(\frac{1}{4}, 1\Big).$$

D'autre part, nous avons

$$M_1 = 4^{\frac{1}{r+1}}, \quad M_2 = 2^{\frac{3r+5}{2(r+1)}} \ \text{ and } \ q, \ \frac{1}{p} \in L^1(0,+\infty).$$

Par conséquent, les conditions $(H1) - -(H3)$ sont satisfaites. Ainsi, le théorème 3.2 est vérifié.

Conclusion

Dans ce travail, on a étudié quelque théorème des points crtiques et la méthode variationnel. Enfin, on a utiliser principe variationnel d'Ekeland avec quelques outils d'analyse fonctionnelle pour étudé l'existence de solutions à un problème aux limites du second ordre suivant :

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' = \lambda q(x)f(x,u(x)), \ x \in [0,+\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

où $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, λ est une paramètre réel positif.

Bibliographie

[1] C. CORDUNEANU. *Integral Equations and Stability of Feedback Systems.* Academic Press, New York. **(1973)**.

[2] D. BOUAFIA, JOHN R. GRAEF, AND T. MOUSSAOUI. *Existence of solutions for a perturbed second order problem on the half-line via Ekeland variational principle.*Communications in Applied Analysis, 22, No. **3 (2018)**, 383-399.

[3] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI, AND D. O'REGAN. *Existance of Solutions for a Second Order Problem on The Half-Line Via Ekeland's Variational Principle*. Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. **36 (2016)**, 131-140.

[4] D. CAROLINE. *Théorèmes de Point Fixe et Principe Variationnel D'Ekeland.* Mémoire. Université de Montréal **(2010).**

[5] J. BAPTISTE AND H. URRUTY. *Bases, Outils et Principes pour L'Analyse Variationnelle.* Springer. **(1966).**

[6] J. M. BORWEIN AND Q. J. ZHU. *Techniques of Variational Analysis*. Springer. **(2005).**

[7] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris **(1983).**

[8] H. K. PATHAK. *An Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory.* Springer **(2018).**

[9] I. EKELAND. *On the variational principle.* J. Math. Anal. Appl. **47(1974)**, 324-353 .

[10] M. BADIALE , E. SERRA. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners Existence Results via the Variational Approach*. Springer-Verlag London Limited (2011).

[11] M. D. R. GROSSINHO AND S. A. TERSIAN. *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations.* Springer Science. **(2001).**

[12] O. FRITES, T. MOUSSAOUI, D. O'REGAN, *Existence of solutions via variational methods for a problem with nonlinear boundary conditions on the half-line*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **22 (2015)**, pp. 395-407.

[13] O. FRITTES, T. MOUSSAOUI, AND D. O'REGAN. *On The Structure of The Critical Set of Non-Differentiable Functions with a Weak Compactness Condition.* Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **22 (2015),**395-407

[14] P. H. RABINOWITZ. *Minimax methods in critical point theory with applications to differntial equations*. CBMS regional conferece series in mathematics, vol. 65, American mathematical society, providence, RI **(1986).**

[15] P. V. SUBRAHMANYAM. *Elementary Fixed Point Theorems.* Springer **(2018).**

[16] S. FORMINE ET A. KOLMOGOROV. *Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Traduction français, Edition Mir. Moscou **(1977).**

[17] V. TRENOGUINE. *Analyse fonctionnelle*. Traduction française, Edition, Mir. Moscou **(1985).**

[18] Y. JABRI. *The Mountan Pass Theorem Variants, Generalizations and Some Applications.* Cambridge University Press, New York. **(2003).**

[19] J. MUSCAT. *Functional Analysis, an Introduction to Metric Spaces, Hilbert Spaces, and Banach Algebras*. Springer, Cham Heidelberg, New York, Dordrecht, London **18,(2014).**

[20] G. A. AFROUZI, A. HADJIAN, V. D. RĂDULESCU, *Variational analysis for Dirichlet impulsive differential equations with oscillatory nonlinearity,* Portugal. Math. (N.S.) Vol. **70, Fasc. 3, (2013)**, 225–242.

[21] K. AIT-MAHIOUT, S. DJEBALI, T. MOUSSAOUI, *Multiple solutions for a BVP on* $(0, +?\infty)$ *via Morse theory and* $H^1_{0,p}(\mathbb{R}^+)$ *versus* $C^1_p(\mathbb{R}^+)$ *local minimizers,* Arab. J. Math. **(2016)**, 5 : 9–22.

[22] M. BADIALE, E. SERRA, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*, Springer, New York, **(2011)**.

[23] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI, D. O'REGAN, *Existence of solutions for a second order problem on the half-line via Ekeland's variational principle*, Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. **36 (2016)**, 131–140.

[24] M. BRIKI, S. DJEBALI, T. MOUSSAOUI, *Solvability of an Impulsive Boundary Value Problem on The Half-Line Via Critical Point Theory*, Bull. Iranian Math. Soc. Vol **43 (2017)**, No. 3, pp. 601–615.

[25] S. DJEBALI, T. MOUSSAOUI, *A class of second order BVPs on infinite intervals,* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **(2006)**, N. 4, 1–19.

[26] S. DJEBALI, S. ZAHAR, *Bounded solutios for a derivative dependent boundary value problem on the half-line,* Dynam. Systems Appl. **19 (2010)**, 545–556.

[27] S. DJEBALI, O. SAIFI, S. ZAHAR, *Upper and lower solutions for BVPs on the half-line with variable coefficient and derivative depending nonlinearity,* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **(2011)**, No. 14, 1–18.

[28] S. DJEBALI, O. SAIFI, S. ZAHAR, *Singular boundary value problems with variable coefficients on the positive half-line,* Electron. J. Differential Equations, Vol. **2013, (2013)**, No. 73, pp. 1–18.

[29] I. EKELAND, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47 (1974)**, 324–353.

[30] Y. JABRI, *The Mountan Pass Theorem, Variants, Generalizations and Some Applications,* Cambridge University Press, New York, **(2003)**.

[31] Y. LIU, *Existence and unboundedness of positive solutions for singular boundary value problems on half-line,* Appl. Math. Comput. **144 (2003)**, 543–556.

[32] H. LIAN, W. GE, *Existence of positive solutions for Sturm-Liouville boundary value problems on the half-line,* J. Math. Anal. Appl. **321 (2006)**, 781–792.

[33] H. LIAN, W. GE, *Solvability for second-order three-point boundary value problems on a half-line*, Appl. Math. Lett **19 (2006)**, 1000-1006.

[34] H. LIAN, P. WANG, W. GE, *Unbounded upper and lower solutions method for Sturm-Liouville boundary value problem on infinite intervals,* Nonlinear Anal. **70 (2009)**, 2627–2633.

[35] R. MA, *Positive solutions for second order three-point boundary value problems,* Appl. Math. Lett. **14 (1)(2001)**, pp. 1–5.

[36] K. PERERA, Z. ZHANG, *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index,* J. Differential Equations, **221 (2006)**, 246–255.

[37] Y. TIAN, W. GE, W. SHAN, *Positive solutions for three-point boundary value problem on the half-line,* Comput. Math. Appl. **53 (2007)**, 1029–1039.

[38] B. YAN, D. O'REGAN, R. AGARWAL, *Unbounded solutions for singular boundary value problems on the semi-infinite interval : Upper and lower solutions and multiplicity,* J. Comput. Appl. Math. **197 (2006)**, 365–386.

[39] B. YAN, D. O'REGAN, R. AGARWAL, *Unbounded solutions for singular boundary value problems on the semi-infinite interval : Upper and lower solutions and multiplicity,* J. Comput. Appl. Math. **197 (2006)**, 365–386

[40] A. FRIEDMAN, *Foundations of Modern Analysis*, Reprint of the 1970 original, Dover Publications, New York, **(1982)**.

Abstract

The purpose of this thesis is to study some critical point theorem and the variational method and to specify the variational principle of Ekeland . Finally, we used Ekeland's variational principle to find the solutions to a second-order boundary value problem in the form :

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' = \lambda q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

Keywords : Ekeland variational principle. Critical point. Existence of solutions. $(P.S)_c$. Second order.

Résumé

Le but de cette mémoire est d'étudier quelque théorème des points crtiques et la méthode variationnel et en présiser le principe variationnel d'Ekeland. Enfin, nous avons utilisé le principe variationnel d'Ekeland pour trouver les solutions à un problème aux limites de second ordre sous la forme :

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' = \lambda q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

Mots clés : Principe variationnel d'Ekeland. Point critique. Existence de solutions. $(P.S)_c$. Second ordre.

ملخص

الغرض من هذه المذكرة هو دراسة بعض نظريات النقاط الحرجة وطريقة التغاير وتحديدا مبدأ التباين لإيكلاند. أخيراً، استخدمنا مبدأ التغاير لإكلاند لإيجاد حلول للمسألة حدودية من الدرجة الثانية تحت الخطية من الشكل:

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' = \lambda q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

الكلمات المفتاحية: مبدأ التغاير لإكلاند. نقطة حرجة. وجود الحلول. شرط بالي-سمايل من مستوى c. الدرجة الثانية.