

Remerciements

Tout d'abord

Je remercie **Allah** pour m'avoir guidé vers le chemin du savoir et de la lumière .

Pour m'avoir donné courage et volonté pour pouvoir réaliser ce modeste travail .

Je ne peux exprimer par les mots

Le sens de mes remerciements pour ma **mère** et mon **père** :que serais je sans leurs permanents soutiens dans ma vie .

Je remercie ensuite

Mr Abdelkader Gasmi pour sa patience et ses conseils pour la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire .

Je remercie tout les professeurs du département de Mathématique, sans oublies aussi mes collègues et amies, ainsi tout ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire .

Table des matières

Introduction	1
1 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides	2
1.1 Caractéristiques physiques des fluides :	2
1.2 Notions de base d'un l'écoulement	3
1.2.1 fluide incompressible	3
1.2.2 fluide parfait	3
1.2.3 Ligne de courant	3
1.2.4 Ecoulements bidimensionnels	4
1.2.5 Ecoulements irrotationnels	4
1.2.6 Ecoulements potentiels	4
1.3 Descriptions du mouvement	5
1.3.1 Description Lagrangienne (description par les trajectoires)	5
1.3.2 Description Eulérienne (description par le champ de vitesses)	6
1.4 Quelques équations de la mécanique des fluides :	6
1.4.1 Equation de continuité	6
1.4.2 Equation de base pour un écoulement potentiel de fluide incompressible	7
1.4.3 Ecoulement potentiel bidimensionnel de fluide incompressible	7
1.4.4 Equation d'Euler	8
1.4.5 Equation de Bernoulli	11

1.5	Fonctions analytiques	12
1.6	La transformation ou représentation	13
1.6.1	Représentation conforme	13
1.6.2	Quelque transformation classique	14
1.7	Théorie des lignes de courant libres	17
2	Solution analytique d'un problème bidimensionnel de type jet	19
2.1	Introduction	19
2.2	Formulation du problème	19
2.3	Résolution de problème	21
3	Traitement numérique de problème	30
3.1	Introduction	30
3.2	Formulation du problème	30
3.2.1	Techniques intégrales de limites	32
3.3	Résolution numérique	34
3.4	Conclusion	36

Introduction

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle comprend deux grandes sous branches:

- la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.

- la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement. Comme autres branches de la mécanique des fluides.

On distingue également d'autres branches liées à la mécanique des fluides :

l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique .

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, mais aussi la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie.

ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre , on présente les notions générale, et les équations fondamentales de dynamique des fluides, une représentation des équation : l'équation de continuité, l'équation d'Euler et l'équation de Bernoulli

Dans la deuxième chapitre on présente la fonction mathématique d'un problème physique d'un écoulement bidimensionnelle de type jet dans un canal semi infini, puis on donne la solution analytique de ce problème en utilisant la théorie des lignes de courant libres basée sur les transformations conformes .

Dans le dernier chapitre on donne une approximation numérique de ce problème en utilisant la méthode intégrant différentielle basé sur le théorème de Cauchy.

Et on termine ce travail par une conclusion .

Chapitre 1

Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.1 Caractéristiques physiques des fluides :

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les une par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler

- On peut répartir les fluides en liquides et en gaz.

Masse volumique ρ : La masse volumique est définie par la relation

$$\rho = \frac{M}{V} (kg/m^3)$$

Pression d'un fluide P : La pression est définie localement à partir de la composante de la force normale à la surface sur laquelle elle s'exerce. Si on considère un élément de surface dS de normale \vec{n} , subissant une force \vec{F} alors la pression P est définie par :

$$d\vec{F} = P \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Dans le cas d'une force perpendiculaire à une surface plane d'aire S , on obtient la définition suivante :

$$P = \frac{dF}{dS}$$

1.2 Notions de base d'un l'écoulement

1.2.1 fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique reste constante au cours du mouvement :

$$\rho = \text{constante}$$

donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.1}$$

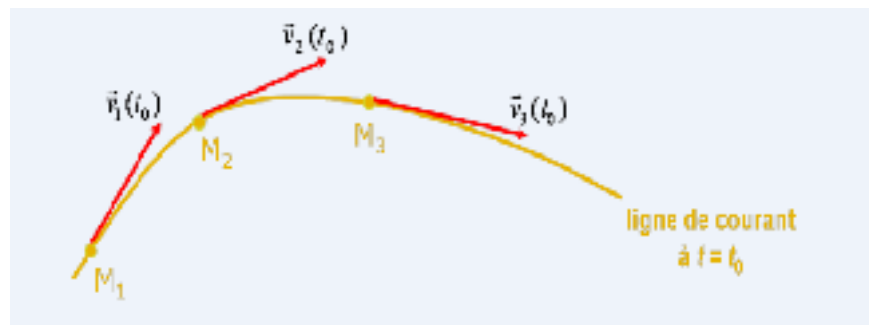
1.2.2 fluide parfait

On dit qu'un fluide est parfait si sa viscosité et les frottements de ce fluide sont nuls ou négligeables par exemple : **l'eau**

1.2.3 Ligne de courant

On appelle ligne de courant une courbe tangente en chacun de ces points au vecteur vitesse en ce point .

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{v_z(x,y,z,t)} \tag{1.2}$$



Figure(1.1) : Illustration de lignes de courant à un instant donné pour un fluide s'écoulant autour d'un solide.

1.2.4 Ecoulements bidimensionnels

L'écoulement en général dépend de trois variables x, y, z a des particuliers qui ramènent à deux ces coordonnées : Les écoulement plans, pour les quels la vitesse, à l'instant t , est pour tous les points parallèles à un plan fixe, choisi pour un plan xOy .

1.2.5 Ecoulements irrotationnels

On dit qu'un écoulement est irrotationnel si seulement si

$$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{V} = 0 \quad (1.3)$$

$\vec{\Omega}$ représente le vecteur rotation ou vorticité .

1.2.6 Ecoulements potentiels

On rappelle aussi qu'en mathématique une fonction, dont le rotation est nul, peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire ϕ , car on a toujours :

$$\text{rot} \vec{(\text{grad } \phi)} = 0$$

on peut donc déduire :

$$\vec{v} = \text{grad } \phi \quad (1.4)$$

ϕ : représente la potentiel de vitesse , par analogique au potentiel de forces en mécanique

On déduit aussi que, du à l'existence d'un fonction potentiel, les écoulement irrotationnels sont dit potentiels.

1.3 Descriptions du mouvement

La description du fluide en mouvement peut se faire de deux façons équivalentes. On peut choisir de suivre les particules fluides dans leur mouvement (description de Lagrange) ou on peut faire un cliché à un instant donné du champ de vitesse de toutes les particules fluides (description d'Euler)

1.3.1 Description Lagrangienne (description par les trajectoires)

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées .

Soient $\vec{S}(\vec{S}_0, t)$ le vecteur position d'une particule donnée et S_0 est sa position initiale au temps initial t_0 . En coordonnées cartésiennes : $\vec{S} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qui s'écrit aussi:

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

Où x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées initiales et x, y, z les coordonnées au temps t de la particule.

La vitesse $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ en \vec{S}_0 peut être calculée par:

$$u_x = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_0, y_0, z_0}, u_y = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x_0, y_0, z_0}, u_z = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{x_0, y_0, z_0}$$

Les avantages de la représentation lagrangienne sont :

- La trajectoire de chaque particule fluide est connue, son histoire peut être tracée.
- La conservation de la masse est satisfaite.

1.3.2 Description Eulérienne (description par le champ de vitesses)

Elle consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide. La représentation mathématique de la méthode eulérienne s'écrit pour la vitesse $u(\vec{S}, t)$ où $u = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ et $\vec{S} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Par ailleurs les composantes du champ de vitesse s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} u_x = u_x(x_0, y_0, z_0, t) \\ u_y = u_y(x_0, y_0, z_0, t) \\ u_z = u_z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

1.4 Quelques équations de la mécanique des fluides :

1.4.1 Equation de continuité

En mécanique des fluides, le principe de conservation de la masse peut être décrit sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 . \quad (1.5)$$

En utilisant la relation suivante

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \rho \times \operatorname{div}(\vec{V}) + \vec{V} \times \operatorname{grad}(\rho) ,$$

l'équation(1.5) devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \times \operatorname{div}(\vec{V}) + \vec{V} \times \operatorname{grad}(\rho) = 0 . \quad (1.6)$$

1.4.2 Equation de base pour un écoulement potentiel de fluide incompressible

On appelle la forme de l'équation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1.7)$$

En substituant cette équation dans la définition du potentiel de vitesse on a :

$$\nabla (\nabla \phi) = 0$$

soit :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.8)$$

∇^2 indique le Laplacien .

Il est intéressant de noter que l'équation différentielle du potentiel de vitesse a été établisant faire intervenir les équation du mouvement. La cinématique de l'écoulement étant déterminée complètement à partir de l'équation (1.8)

1.4.3 Ecoulement potentiel bidimensionnel de fluide incompressible

En écoulement bidimensionnel l'équation du potentiel de vitesse se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.9)$$

On introduit la fonction de courant en rappelant sa définition par rapport aux composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{cases} .$$

On a aussi pour le potentiel de vitesse :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} .$$

En identifiant ces deux systèmes d'équation on aboutit aux relations suivantes entre ϕ et ψ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} ,$$

ces équation sont connues comme celles de Cauchy-Riemann, qui permettent de trouver le potentiel de vitesse à partir de la fonction de courant ou inversement .

En substituant les équations de la fonction de courant dans la condition d'irrotationalité (qui se réduit dans ce cas à : $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$)

On trouve que la fonction de courant satisfait aussi l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

Il faut noter que la fonction de courant ne satisfait pas l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques .

1.4.4 Equation d'Euler

L'aspect dynamique du mouvement des fluides est régit par les équation du mouvement ces équation sont obtenues en appliquant la loi de newton sur des particules de fluide. On s'intéressera dans cet partie aux fluides parfaits uniquement pour lesquels le frottement est négligé, le fluide est dit dans ce cas fluide parfait. Dans cette situation les types de forces qui vont agir sont de la sorte

1. Forces de volume, exemple : la force de pesanteur.
2. Forces de surfaces, pression uniquement. Ces forces agissent normalement aux surfaces en question

3. Forces d'inertie, comme exemple on les forces d'accélération des particules.

La loi de Newton du mouvement est comme suit :

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \quad (1.10)$$

Pour illustrer le développement des équation qui régissent le mouvement de particules de fluide, on considère pour la simplicité de l'illustration une représentation cartésienne bidimensionnelle suivant la direction (Ox) on a :

$$F_x = m\gamma_x$$

La particule de fluide est représentée en deux position à deux instant t et $t+dt$ a

$$\gamma_x = \frac{du}{dt} \quad (1.11)$$

$u(x, y, t)$: La composant de la vitesse varie avec la position et le temps. En négligeant les termes d'ordre supérieur, on peut écrire:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy . \quad (1.12)$$

La variation infinitésimales dans les position dx et dy de la particule de fluide sont donnée par les équation de la trajectoire

$$dx = udt \text{ et } dy = vdt$$

L'accélération dans la direction x est :

$$\gamma_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

On reconnaît le développement de la dérivé particulière (matérielle) :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

soit pour le vecteur accélération :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La forme vectorielle de $\vec{\gamma}$ est :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} + \vec{F}$$

Cette équation développée par Euler est nommée équation d'Euler :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} + \vec{F}$$

Le cas où la force de volume \vec{F} dérive d'un potentiel :

$$\vec{F} = -\text{grad } \vec{U}$$

En générale on se trouve dans le champ de pesanteur :

$$U = gh$$

L'équation d'Euler peut être écrite sous une autre forme

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} + \vec{F} \\ \iff \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} + \vec{F} \\ \iff \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \vec{P} + \vec{F} \end{aligned}$$

Equation d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \vec{P} = \vec{F} + \vec{v} \text{ rot } \vec{v} \quad (1.13)$$

1.4.5 Equation de Bernoulli

A partir de l'équation d'Euler pour un fluide incompressible et parfait et lorsque les forces de volume dérivent d'un écoulement stationnaire instationnaire :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} - \text{grad } \vec{U}$$

On rappelle l'identité vectorielle:

$$(\vec{v} \text{ grad})\vec{v} = \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}$$

ce qui permet d'écrire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} - \text{grad } \vec{U} \\ \iff \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

On rappelle la forme du vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

et dans le cas d'un écoulement stationnaire c'est à dire ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$) alors on peut écrire :

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U \right) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0$$

On projet cette équation sur une ligne de courant de vecteur unitaire ,on a alors:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \text{grad}$$

ce qui donne :

$$\vec{s} \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U \right) + \vec{s} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = 0$$

Comme s et v sont colinéaires :

$$\vec{s} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = 0$$

Ainsi on a

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U \right) = cte$$

Le long d'un ligne de courant est après on a :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U = cte$$

Dans ce cas les force de volume se réduisent le plus souvent à la seule force de pesanteur , on a la force simple de l'équation de Bernoulli pour les fluide incompressibles parfait d'un écoulement stationnaire irrotationnel est:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = cte \quad (1.14)$$

1.5 Fonctions analytiques

Définition 1.5.1

(fonction analytique) Soit z_0 dans \mathbb{C} . Soit U un voisinage de z_0 et f une fonction de U dans \mathbb{C} . On dit que f est **analytique en** z_0 si f est développable en série entière au voisiange de z_0 , i.e. s'il existe un $r > 0$ et une série entière $(a_n z^n)_{n \geq 0}$ de rayon de convergence $\rho \geq r$ telle que

$$(\forall z \in \bar{B}(z_0, r)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de U .

Proposition 1.5.1

L'ensemble des fonctions analytiques sur l'ouvert U est une algèbre sur \mathbb{C} .

Théorème 1.5.1 (Cauchy 1)

Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert de \mathbb{C} , et K un compact régulier inclus dans Ω , alors

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0. \quad (1.15)$$

Théorème 1.5.2 (*Cauchy 2*)

Soient un Ω ouvert de \mathbb{C} , K un compact régulier inclus dans Ω , $z_0 \in K^0$ et f une fonction holomorphe sur Ω , alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (1.16)$$

1.6 La transformation ou représentation

L'ensemble des équations

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \quad (1.17)$$

définissent en général une transformation ou une représentation, qui établit une correspondance entre les points du plan des UV et les points du plan des xy . Les équations (1.17) sont appelées équations de la transformation. Si à chaque point du plan des UV correspond un point et un seul du plan des xy on parlera d'une transformation biunivoque. Dans un tel cas un ensemble de points du plan des xy [tel qu'une courbe ou un ouvert connexe] est appliqué sur un ensemble de points du plan des UV [courbe ou ouvert connexe] et réciproquement. Les ensembles de points qui se correspondent ainsi dans les deux plans sont souvent dits images l'un de l'autre.

1.6.1 Représentation conforme

Supposons que le point (x_0, y_0) du plan des xy soit transformé en le point (u_0, v_0) du plan des UV [Figure (1.2) et (1.3)] cependant que les courbes C_1 et C_2 , sont respectivement transformées en \acute{C}_1 et \acute{C}_2 . Une transformation telle que l'angle entre C_1 et C_2 en (x_0, y_0) \acute{C}

est égal en grandeur et sens, à l'angle entre \acute{C}_1 et \acute{C}_2 en (u_0, v_0) est dite conforme en (x_0, y_0) . Une transformation qui conserve les angles en grandeur mais pas nécessairement en sens, est dite isogonale.

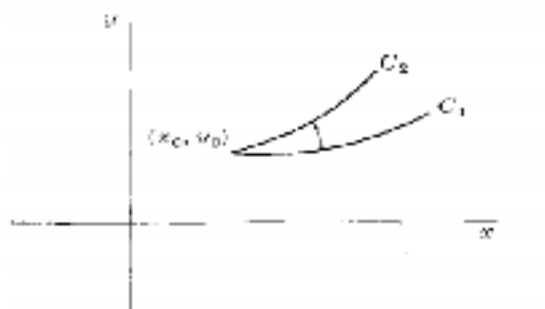


Figure 1.2 plan de xy

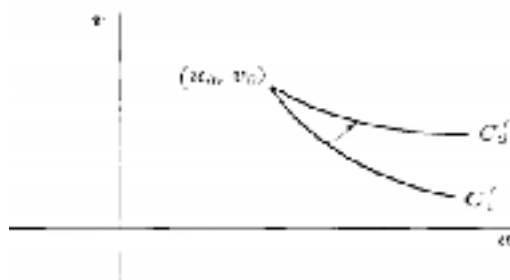


Figure 1.3 plan UV

1.6.2 Quelques transformations classiques

1) **translation** : Une translation correspond à la transformation :

$$z \longrightarrow z + a$$

Où a également un nombre complexe représente le vecteur de translation

2) **Rotation** : Une rotation de centre 0 et d'angle θ , correspond à la transformation

$$z \longrightarrow e^{i\theta} z$$

3) **Homothétie** : Une homothétie de centre 0 et de rapport r , correspond à la transformation

$$z \longrightarrow rz$$

4) **Transformation inverse** : Transformation inverse est une transformation

$$z \longrightarrow z^{-1}$$

pour z non nul transforme les cercles en droite, les lignes en droites ou cercles, selon que l'objet passe ou non par l'origine.

5) **Transformation homographique** : La transformation est :

$$z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

avec a, b, c, d des complexes, transforme les cercles ou demi plan en droite et réciproquement.

La transformation de Schwarz-Christoffel

Considérons un polygone [Figure 1.4] dans le plan des w , ayant pour sommets w_1, w_2, \dots, w_n et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soit w_1, w_2, \dots, w_n les points correspondant respectivement à x_1, x_2, \dots, x_n de l'axe réel du plan des z [Figure 1.5].

Une transformation qui représente l'intérieur \Re du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des z , et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donnée par :

$$\frac{dw}{dz} = \alpha (z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1} \alpha (z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1}, \dots, \alpha (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} \quad (1.18)$$

$$w = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1} (z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1}, \dots, \alpha (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} dz + B \quad (1.19)$$

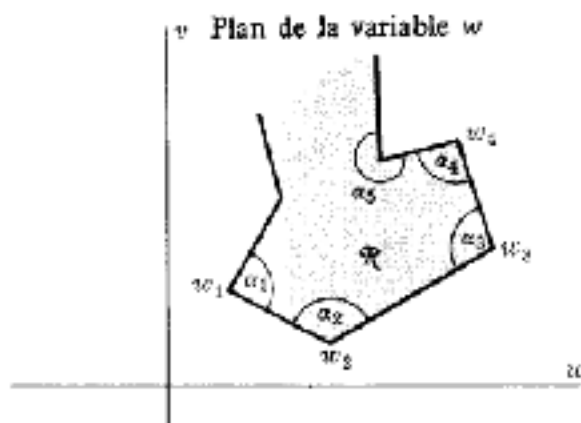


Figure 1-4: Plan de la variable w

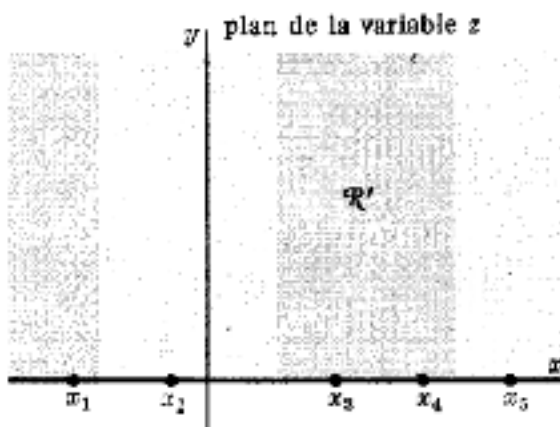


Figure 1.5: plan de la variable z

où A et B sont des constantes complexes.

On notera que

1. Parmi les points x_1, x_2, \dots, x_n on peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple x_n , à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de (1.18) et (1.19) n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones fermés.

1.7 Théorie des lignes de courant libres

La théorie des lignes de courant libres consiste à étudier les problème d'écoulement bidimensionnel irrotationnel stationnaire bornés par les parois rigides rectilignes et des lignes de courant libres de formes inconnues sur lesquelles la pression est supposé constante.

Si les lignes de courant libres ne sont pas présentes et les effets de gravité sont négligés, la région d'écoulement dans le plan physique est un polygone. Aussi si les lignes de courant libres sont présentes et l'effet de gravité ainsi que les effets de la tension de surface sont négligés la région d'écoulement peut être transformée par une transformation conforme à une région polygonale.

Cette région est une partie du plan hodographe définie par :

$$\Omega = \log \left(1 / \frac{df}{dz} \right) . \quad (1.20)$$

L'idée est d'introduire la fonction complexe Ω définie par :

$$\Omega = \log \left(U / \frac{df}{dz} \right) = \log \left(\frac{U}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{U}{q} \right) + i \theta$$

où

$$f = \varphi + i\phi, \quad \frac{df}{dz} = u - iv, \quad q = \sqrt{u^2 + v^2} .$$

(u, v) sont les composantes du vecteur vitesses suivant les directions de l'axe des x et l'axe des y respectivement, θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et U la vitesse de référence. La fonction Ω possède les propriétés suivantes :

-La partie réelle de Ω est constante sur la ligne de courant libre, c'est à dire que

$$\log \left(\frac{U}{q} \right) = Cte$$

-La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rectiligne, c'est à dire que

$$\theta = Cte$$

Chapitre 2

Solution analytique d'un problème bidimensionnel de type jet

2.1 Introduction

Le problème de la détermination de la surface libre d'un jet dans un canal semi infini est considéré. comme problème classique de la libre circulation aérodynamique d'un fluide parfait et a été étudié par de nombreux auteurs. Les premiers travaux dans ce type de problème se caractérise par l'utilisation de la formule Schwarz-Christoffel. Celle-ci peut étudier les écoulements sur la frontière, qui combine parois rectilignes et surface libre. On utilise des lignes de courant libre pour déterminer la solution exact.

2.2 Formulation du problème

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel pour trouver la solution exacte du problème défini comme suit. Considérons un écoulement bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux, On suppose que l'écoulement est uniforme à l'infini de vitesse U et la pression est constante sur la ligne de courant libre. On choisi AB sur l'axe $XO\acute{X}$ BC sur l'axe $YO\acute{Y}$ [figure 2.1] .

On suppose que l'écoulement est uniforme, de vitesse U et d'amplitude H , ou $x \rightarrow -\infty$ et $y \rightarrow +\infty$. Le débit est limité supérieurement par le linge du courant AC , pour x négatif.

Le problème mathématique consiste à déterminer la fonction potentielle ϕ qui vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } AB \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } BC \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right) = \text{constant} \quad \text{sur } AC \end{array} \right.$$

2.3 Résolution de problème

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel et la méthode des lignes de courant libres pour trouver la solution exacte de notre problème. Pour résoudre ce problème, nous utilisons d'abord la méthode de la théorie courant libre introduit par Kirchhoff, basée sur la transformation d'hodographe. la transformation complexe

est définie par :

$$\Omega = \log \left(\frac{U dz}{df} \right) = \log \left(\frac{U}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{U}{q} \right) + iv$$

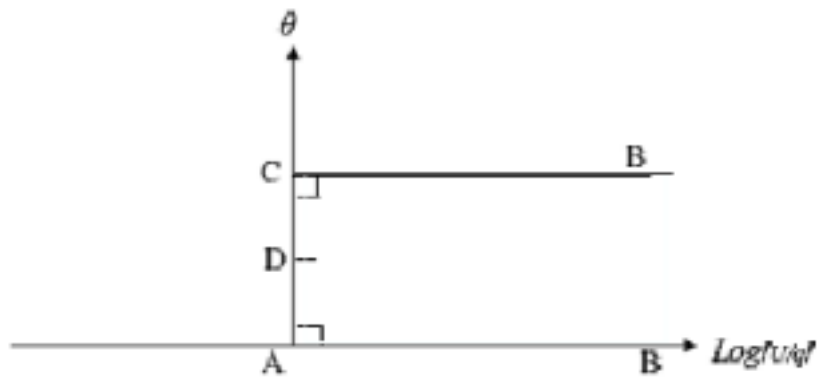
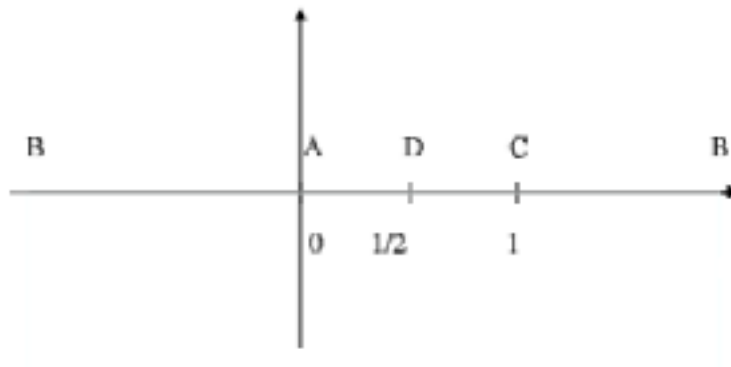
Où $z = u - iv$, q et θ sont le module de la vitesse et l'angle entre le vecteur vitesse et l'axe horizontale, respectivement. Par cette dernière transformation, le champ occupé par le fluide dans le z - plan est transformé en bande semi-infinie dans le Ω - plan [Figure 2.3].

La transformation conforme d'une bande semi-infinie dans [Figure 2.3] à en demi-plan(λ -plan), est donnée par le théorème de Schwarz-Christoffel, en respectant le sens et l'orientation de l'écoulement [Figure 2.4].

On va chercher une relation entre λ et Ω :

On applique la transformation Schwarz-Christoffel :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \alpha (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi} - 1}. \quad (2.1)$$

Figure 2.3: Ω – planFigure 2.4 λ – plan

On utilise les points $(A(0,0), C(1,0))$ dans λ - plan) et $(A(0,0), C(0, i \pi/2))$ dans Ω -plan).

$\alpha_A = \frac{\pi}{2}, \alpha_C = \frac{\pi}{2}$, on substitue ces données dans l'équation (2.1) on trouve :

$$\frac{d \Omega}{d \lambda} = \alpha (\lambda - 0)^{-\frac{1}{2}} (\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d \Omega}{d \lambda} = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda - 1}} \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow \int d \Omega = \alpha \int \frac{d \lambda}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda - 1}}$$

$$\Rightarrow \Omega = 2\alpha \log \left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda - 1} \right) + \beta \quad (2.3)$$

On va déterminer la valeur de α et β :

On remplace le point C($\lambda = 1$, $\Omega = i\frac{\pi}{2}$) dans l'équation(2.3) trouve :

$$\begin{aligned} i\frac{\pi}{2} &= 2\alpha \log \left(\sqrt{1} + \sqrt{1 - 1} \right) + \beta \\ &\Rightarrow \beta = i\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La détermination de valeur α :

en substitue le point A($\lambda = 0$, $\Omega = 0$) dans l'équation(2.3)on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= i\frac{\pi}{2} + 2\alpha \log \left(\sqrt{0} + \sqrt{0 - 1} \right) \\ \Rightarrow -i\frac{\pi}{2} &= 2\alpha \log \left(\sqrt{-1} \right) = 2\alpha \log (i) \\ &\Rightarrow \alpha = -i\frac{\pi}{2} \frac{1}{2 \log(i)} \\ &\Rightarrow \alpha = -\frac{\pi \log(i)}{4} \frac{i}{i} \\ &\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc

$$\Omega = i\frac{\pi}{2} - \log \left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda - 1} \right) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow e^{\Omega} &= e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-\log(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda-1})} \\
 \Rightarrow e^{\Omega} &= i \frac{1}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}} \\
 \frac{e^{\Omega}}{i} &= \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1} \\
 \sqrt{\lambda} - \frac{e^{\Omega}}{i} &= \sqrt{\lambda-1} \\
 (\sqrt{\lambda} - \frac{e^{\Omega}}{i})^2 &= (\sqrt{\lambda-1})^2 \\
 \Rightarrow \left(\lambda - e^{2\Omega} - \frac{2}{i}\sqrt{\lambda}e^{\Omega} \right) &= \lambda - 1 \\
 \Rightarrow \sqrt{\lambda} &= -i \sinh \Omega
 \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda = -\sinh^2 \Omega \quad (2.5)$$

On va chercher la dépendance entre f et λ :

On utilise la transformation Christoffel-Schwarz :

les points :

$A(\infty, iHU), C(\infty, iHU), D(0, iHU), B(0, 0)$ dans le f - plan

$A(0, 0), D(\frac{1}{2}, 0), C(1, 0)$, dans le λ - plan

$$\frac{df}{d\lambda} = \alpha (\lambda)^{-1} (\lambda - 1)^{-1} = \alpha \frac{1}{\lambda(\lambda - 1)} \quad (2.6)$$

En intégrant cette équation, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \int df &= \alpha \int \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda - 1)} \\
 f &= \alpha \int \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda - 1)} + \beta \\
 f &= \alpha [\log(\lambda - 1) - \log(\lambda)] + \beta
 \end{aligned}$$

$$f = \alpha \log \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) + \beta \quad (2.7)$$

On va déterminer les valeurs α et β

on choisit le point $B(\lambda = \infty, f = 0)$ on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \log \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + \beta \\ \Rightarrow \beta &= 0 \end{aligned}$$

Pour déterminer α , on choisit le point $D (\lambda = \frac{1}{2}, f = iHU)$:

$$\begin{aligned} iHU &= \alpha \log \left(\frac{1/2-1}{1/2}\right) \\ \Rightarrow iHU &= \alpha \log (-1) \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{iHU}{2 \log(i)} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{HU}{\pi} \end{aligned}$$

L'équation (2.7) devient :

$$\begin{aligned} f &= \frac{HU}{\pi} \log \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) \\ \Rightarrow \frac{f \pi}{HU} &= \log \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) \\ \Rightarrow e^{\frac{f \pi}{HU}} &= \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\lambda = \frac{1}{1 - e^{f \pi / HU}} \quad (2.8)$$

La recherche de la relation entre z et λ :

On utilise la fonction de kirchoff

$$\begin{aligned} \Omega &= \log \left(U \frac{dz}{df}\right) \\ \Rightarrow e^{\Omega} &= U \frac{dz}{df} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Alors

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} e^{\Omega} \quad (2.10)$$

on

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= \frac{HU}{\pi} \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \\ \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{1}{U} \times e^{\Omega} \times \frac{HU}{\pi} \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \\ \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{e^{\Omega} H}{\pi} \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \end{aligned}$$

On utilise la relation précédente :

$$e^{\Omega} = i \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1} \right)$$

alors :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{Hi}{\pi} \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1} \right) \\ \frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{Hi}{\pi} \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{-(1-\lambda)} \right) \\ \Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{Hi}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)} \cdot -\frac{H}{\pi} \frac{1-\lambda}{\lambda\sqrt{(1-\lambda)}} \\ dz &= -\frac{H}{\pi} \left[\frac{d\lambda}{\lambda(\sqrt{1-\lambda})} + i \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

l'équation (2.11) \Rightarrow

$$dz = -\frac{H}{\pi} \left[\int \frac{d\lambda}{\lambda(\sqrt{1-\lambda})} + i \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)} \right] \quad (2.12)$$

On pose :

$$I_1 = \int \frac{d\lambda}{\lambda(\sqrt{1-\lambda})}$$

On utilise le changement de variable :

$$1 - \lambda = t^2$$

$$\Rightarrow -d\lambda = 2tdt$$

Alors

$$I_1 = \int \frac{-2t}{(1-t^2)t} dt$$

$$\Rightarrow I_1 = -\log(1-t) - \log(1+t)$$

$$I_1 = -\log \frac{(1-t)}{(1+t)}$$

donc

$$I_1 = -\log \frac{(1 + \sqrt{1-\lambda})}{(1 + \sqrt{1-\lambda})}$$

On calcule $I_2 : I_2 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}$

On pose $\lambda = t^2 \Rightarrow d\lambda = 2tdt$

Alors

$$I_2 = \int \frac{2tdt}{t(1-t^2)}$$

$$\Rightarrow I_2 = \log \left(\frac{1+t}{1-t} \right)$$

$$\Rightarrow I_2 = \log \left(\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right)$$

donc l'équation (2.12) devient :

$$z - z_0 = -\frac{H}{\pi} \left[-\log \frac{(1 + \sqrt{1-\lambda})}{(1 + \sqrt{1-\lambda})} + i \log \left(\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow x + iy - x_0 - iy = -\frac{H}{\pi} \left[-\log \frac{(1 + \sqrt{1-\lambda})}{(1 + \sqrt{1-\lambda})} + i \log \left(\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{H}{\pi} \log \frac{(1 + \sqrt{1-\lambda})}{(1 + \sqrt{1-\lambda})} + x_0 \\ y = -\frac{H}{\pi} \log \left(\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) + y_0 \end{cases}$$

puisque l'écoulement est : $y > 0$ et $x < 0$ alors :

$$\begin{cases} x = \frac{-H}{\pi} \log \frac{(1 + \sqrt{1 - \lambda})}{(1 + \sqrt{1 - \lambda})} + x_0 \\ y = \frac{H}{\pi} \log \left(\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) + y_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

on choisit le point D ; $z_0 = -L + iL$ et le point D ; $\lambda = 1/2$, on trouve :

$$\begin{cases} -L = \frac{-H}{\pi} \log \frac{(1 + \sqrt{1 - 1/2})}{(1 + \sqrt{1 - 1/2})} + x_0 \\ L = \frac{H}{\pi} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1/2}}{1 - \sqrt{1/2}} \right) + y_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -L = \frac{-H}{\pi} \log (1 + \sqrt{2})^2 + x_0 \\ L = \frac{H}{\pi} \log (1 + \sqrt{2})^2 + y_0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x_0 = -L + \frac{2H}{\pi} \log (1 + \sqrt{2}) \\ y_0 = L - \frac{2H}{\pi} \log (1 + \sqrt{2}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-H}{\pi} \log \frac{(1 + \sqrt{1 - \lambda})}{(1 + \sqrt{1 - \lambda})} - L + \frac{2H}{\pi} \log (1 + \sqrt{2}) \\ y = \frac{H}{\pi} \log \left(\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) + L - \frac{2H}{\pi} \log (1 + \sqrt{2}) \end{cases} \quad (2.14)$$

L'amplitude du jet de l'origine est :

$$H = \lim_{\lambda \rightarrow 0} y(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{H}{\pi} \log \left(\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) + L - \frac{2H}{\pi} \log (1 + \sqrt{2})$$

donc

$$H = L - \frac{2H}{\pi} \log (1 + \sqrt{2}) \quad (2.15)$$

On représente C comme le degré de l'écoulement de contraction :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{H}{L} = \frac{L - \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})}{L} \\
C &= 1 - \frac{2C}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \\
C + \frac{2C}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) &= 1 \\
C \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \log(1 + \sqrt{2}) &= 1
\end{aligned}$$

$$C = 0.64 \tag{2.16}$$

On substitue l'équation (2.15) dans l'équation (2.14) on trouve :

$$\begin{cases}
x = -\frac{H}{\pi} \log \frac{(1 + \sqrt{1 - \lambda})}{(1 + \sqrt{1 - \lambda})} - H, & 0 \leq \lambda \leq 1 \\
y = \frac{H}{\pi} \log \left(\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) + H
\end{cases}$$

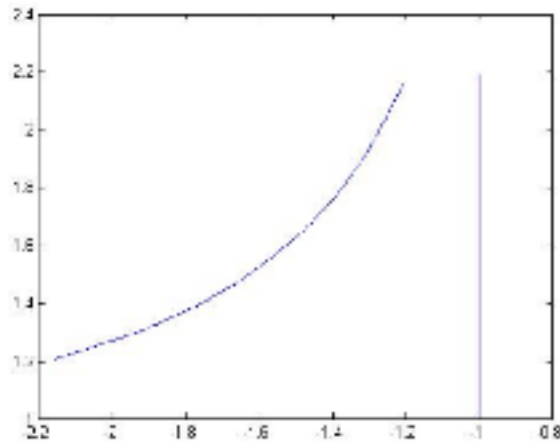


Figure 2.5: forme de la surface libre

Chapitre 3

Traitement numérique de problème

3.1 Introduction

Les méthodes basées sur l'approximation numérique sont devenues un outil largement utilisé dans la résolution des problèmes de la physique. Cela est dû au développement important que connait le domaine informatique ces dernières décennies d'années. Un tel développement qui a rendu le calcul numérique plus rapide, plus précis et moins coûteux.

3.2 Formulation du problème

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.1)$$

On définit la fonction de flot ψ par la formule suivante :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, v = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.2)$$

on fait la somme des équations (3.1) et (3.2) pour obtenir les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (3.3)$$

on a le variable complexe $z = x + iy$ représentent le plan physique et introduire le potentiel complexe

$$f(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y) \tag{3.4}$$

L'objectif est de dériver une relation intégrale qui ne comporte que des inconnues qui sont sur la surface libre. Cela ne peut pas être fait dans le plan f , car des inconnues qui sont activées. Les limites solides seraient incluses. Cependant, cela peut être fait en utilisant d'abord la cartographie conforme

$$\zeta = \alpha + i\beta = e^{-\pi f} = e^{-\pi(\phi + i\psi)} = e^{-\pi\phi} (\cos(\pi\phi) - i \sin(\pi\phi)) \dots \dots \dots \tag{3.4}$$

Le tableau 1 peut maintenant être étendu pour inclure l'image des points d'intérêt dans le nouveau

z -plan. Cela donne la nouvelle table

les points	plan z	plan ζ
A	$\psi = 1, \phi = -\infty$	$\alpha = +\infty, \beta = 0$
D	$\psi = 1, \phi = 0$	$\alpha = 1, \beta = 0$
C	$\psi = 1, \phi = +\infty$	$\alpha = 0, \beta = 0$

Tableau 3.1 Représentation des points du plan f sur le plan ζ

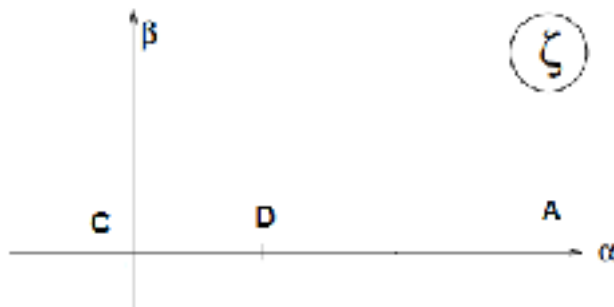


Figure 3.1 Le flux dans le complexe ζ - plan

La relation entre Les composantes de vitesse u et v , et la fonction de potentiel et de flux ϕ et ψ est la vitesse complexe introduite comme

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= u - iv & (3.5) \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{df}{dz} \right) &= \tau - i \theta. \end{aligned}$$

donc

$$u - iv = e^{\tau - i \theta} \quad (3.6)$$

L'angle entre le rationalise et l'axe des x ,et les valeur limites sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = 0 & \text{si } \beta = 0 \text{ et } -\infty < \alpha < 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} & \text{si } \beta = 0 \text{ et } 0 < \alpha < 1 \\ \theta \text{ inconnu} & \text{si } \beta = 0 \text{ et } 1 < \alpha < +\infty \end{array} \right. \quad (3.7)$$

3.2.1 Techniques intégrales de limites

Dans cette partie une équation intégrale pour τ et θ doit être établi en utilisant une technique intégrale aux limites, dans le plan ζ . Tout d'abord, un contour intégral de la forme :

$$\oint_{\gamma} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i \theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d \zeta \quad (3.8)$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i \theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d \zeta = \oint_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i \theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d \zeta + \oint_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, \beta) - i \theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d \zeta \quad (3.9)$$

La contribution intégral du demi cercle de rayon infini , dénote par

$$\oint_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i \theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, \beta) - i \theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta = 0 \quad (3.10)$$

$$\tau(\alpha_0, 0) - i \theta(\alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha_0, \beta) - i \theta(\alpha_0, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \frac{1}{\pi i} \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, \beta) - i \theta(\alpha, \beta)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.11)$$

La limite de (3.11), telle que $R \rightarrow \infty$ est prise. La deuxième intégrale sur le côté droit De (3.11) devient

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, \beta) - i \theta(\alpha, \beta)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i \theta(\alpha, \beta)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.12)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha_0, \beta) - i \theta(\alpha_0, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta = 0 \quad (3.13)$$

Maintenant (3.11) a été réduit à

$$\tau(\alpha_0, 0) - i \theta(\alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i \theta(\alpha, \beta)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.14)$$

qui en prenant les parties réelles et imaginaires donner

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.15)$$

L'intégrale dans l'équation (3.14) est devise en quatre intégrales :

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = -\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha - \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \right) \quad (3.16)$$

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - \alpha_0}{-\alpha_0} \right| - \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.17)$$

Cette équation tient le long de la surface libre, avec $\psi = 0$

$$\alpha = e^{-\pi\phi} \Rightarrow d\alpha = -\pi e^{-\pi\phi} d\phi, \quad (3.18)$$

En remplaçant (3,18) en (3,17)

$$\hat{\tau}(\phi_0) = -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - e^{-\pi\phi_0}}{-e^{-\pi\phi_0}} \right| - \int_1^{+\infty} \frac{\hat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\alpha \quad (3.19)$$

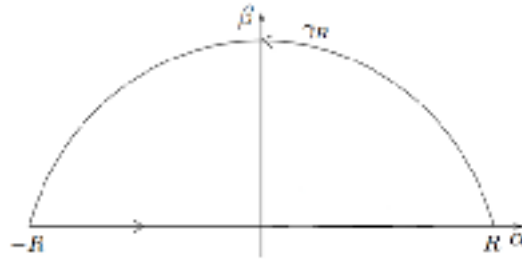


Figure 3.2 : Le complexe ζ -plan montrant le contour utilisé dans la dérivation de(3.14)

3.3 Résolution numérique

Calcul numérique de τ

Dans cette section, La procédure numérique utilisée pour calculer les solutions à cette équation sera discutée. L'expression (3.19) est utilisée pour calculer τ le long de la surface libre. C'est requis Ont des points, ϕ_0 , le long de la surface libre à laquelle les valeurs τ peuvent être évaluées. Ceci est passé en créant un maillage également espacé, dans la fonction potentielle, sur la région Qui concerne la surface libre, c'est-à-dire $0 \leq \phi < +\infty$.

$$\phi_I = (I - 1) \Delta \quad , \quad I = 1 \dots N \quad . \quad (3.20)$$

Où $\Delta > 0$, est l'incrément uniforme en ϕ entre les points de maillage consécutifs. Si ces points sont utilisés pour calculer τ , alors un problème survient avec la partie intégrante

$$\int_1^{+\infty} \frac{\hat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\alpha \quad . \quad (3.21)$$

De (3.19). On le voit dans (3.21), que pour chaque point de maille, il y aurait une singularité dans l'intégrant, où $\phi_I = \phi_0$. L'intégrale est une Cauchy Valeur principale. La valeur peut être approchée si l'intégrale (3.21) est évaluée par la règle trapézoïdale, Avec une sommation sur ϕ_I telle que ϕ_0 est le point médian d'un sous-intervalle, défini comme suit

$$\phi_I^m = \frac{\phi_{I+1} + \phi_I}{2} \quad I = 1 \dots N - 1 \quad . \quad (3.22)$$

Tout d'abord, (3.19) est réécrit comme

$$\tau_I^m = \hat{\tau}(\phi_I^m) = -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - e^{-\pi\phi_I^m}}{-e^{-\pi\phi_I^m}} \right| - \int_1^{+\infty} \frac{\hat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_I^m}} d\alpha \quad . \quad (3.23)$$

Où $\tau_I^m = \hat{\tau}(\phi_I^m)$ a été introduit pour faciliter la notation. Puis, en utilisant le trapézoïdal La règle donne

$$\tau_I^m = -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - e^{-\pi\phi_I^m}}{-e^{-\pi\phi_I^m}} \right| - \sum_{j=1}^N \frac{\theta_j e^{-\pi\phi_j} \Delta w_j}{e^{-\pi\phi_j} - e^{-\pi\phi_I^m}} \quad I = 1, \dots, N - 1 \quad . \quad (3.24)$$

Où w_j la fonction de pondération telle que

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & j = 1, N \\ 1 & \text{autrement} \end{cases} \quad . \quad (3.25)$$

3.4 Conclusion

On étudie un problème d'écoulement potentiel, bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux.

Dans ce travail on a donné une formulation mathématique de ce problème la solution analytique de ce problème en utilisant la méthode des lignes de courant libres basée sur les transformations conformes .

On appliqué aussi la méthode intégral-différentiel pour donner la solution numérique de ce problème, pour trouver la paramétrique de la forme de surface libre .

Bibliographie

- [1] **Ben Hamouda Riad**, Notions de mécanique des fluides, cours et exercices corrigés, Centre de Publication Universitaire Tunis 2008 .
- [2] **Bouderah B et Gasmi A et Serguine H**, Zero Gravity of Free surface Jet Flow, International Mathematical From ,2,2007,no.66,3273-3277.
- [3] **Cédric Milliet**, cours d'analyse complexe ,Cours de troisième année de Lisans Université Galatasaray,2011.
- [4] **Damou Merzak**, Mecanique des fluide, reimpression 1996 .
- [5] **kherfi salima**, problème des écoulement au- dessus des obstracles avec l'effet de gravité, Mémoire master Université de Ourgla (2015) .
- [6] **Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia**, Mécanique des fluide, Dunod, Paris, 2011 .
- [7] **Scott Tooley** The Effects Of Surface Tension On Free Surface Flows Intersecting Rigid Walls, A thesis submitted to the School of Mathematics of the University of East Anglia for the degree of Doctor of Philosophy July 2002.
- [8] **Murray R. Spiegel**, Theory and Problems of Complex Variables, Spiegel Copyright © McGraw-Hill Inc, New York, 1973 .