



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITSE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA –

THÈSE

Présentée à la Faculté des Mathématiques et de l'informatique

Département de Mathématique

Pour l'obtention du diplôme de doctorat en sciences

Spécialité: Mathématiques Option: Analyse fonctionnelle et numérique

Par:

Miloud MOUSSAI

Intitulée:

Résolution des équations intégro-défférentielles

Soutenue publiquement le : 04/fev/2018 devant le jury

D. ACHOUR	Prof. Université Mohamed Boudiaf - M'sila-	Président
L. CHITER	Prof. Université de Sétif 1	Rapporteur
A. GASMI	Prof. Université. Mohamed Boudiaf - M'sila-	Examineur
A. MENOUNI	Prof. Université de Batna	Examineur
A. BOUREGHDA	MCA . Université de Sétif	Examineur
A. MEMOU	MCA. Université Mohamed Boudiaf - M'sila-	Examineur

REMERCIEMENTS

Mes remerciements les plus sincères sont adressés tout d'abord à mon rapporteur de thèse, Monsieur Chiter Lakhdar, pour sa confiance et son soutien depuis le début de cette thèse. Je le remercie également pour ses efforts constants afin de me faire progresser et ses remarques constructives qui m'ont été d'une grande aide pour réaliser mon projet de recherche.

Je tiens également à remercier Monsieur Achour Dahmane pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury.

Mes remerciements vont également à Messieurs : Gasmi Abdelkader, Menouni Abdelaziz, Boureghda Abdellatif, et à Monsieur Memou Ameer, qui ont accepté de participer comme examinateurs dans le jury de ma thèse.

Mes remerciements vont enfin à mes proches, pour leur soutien technique et le réconfort qu'elles ont pu m'apporter tout au long de ces années de thèse. Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mes amis qui m'ont soutenu dans les moments délicats et ont cru en moi jusqu'à la fin.

ملخص.

في هذا البحث قدمنا وناقشنا بعض نماذج للحلول العددية و التقريبية لبعض انواع المعادلات التكاملية - التفاضلية، وان الحل التقريبي لتلك المعادلات قائمة على اساس التقارب باستعمال طريقة تحليل الهوموتوبي و طريقة ادومين من جهة. و من جهة أخرى تم كذلك استخدام كثيرات حدود (لوجندر، ادومين، و برنشتاين) للحلول العددية. و عن طريق استخدام مصفوفة العمليات للتكامل و المشتقة لمتعددات حدود برنشتاين أمكن تحويل المسائل الى جملة معادلات جبرية سهلة الحل. أخيرا قدمنا بعض الامثلة العددية التوضيحية التي تثبت ان الطرائق العددية دليل على صحة وكفاءة هذه التقنية والتقارب للحل المضبوط.

الكلمات المفتاحية : معادلات تكاملية تفاضلية - طريقة تحليل الهوموتوبي - طريقة ادومين- كثيرات حدود برنشتاين - مصفوفات العمليات .

Résumé.

L'objectif de ce travail est de trouver la solution approché et numérique de quelques types d'équations intégro-différentielles avec la méthode d'analyse d'homotopie (HAM) et la méthode de décomposition d'Adomian (ADM). Dans les méthodes numériques, on a utilisé les polynômes de Legendre, et de Bernstein. Dans cette dernière, l'utilisation de la matrice opérationnelle nous a permis de transformer ces équations à un système d'équations algébriques dont la solution est facile à trouver. Quelques exemples numériques prouvent l'efficacité des méthodes employées pour trouver les solutions approchées.

Mots clés : Equations intégro-différentielles, méthode d'analyse d'homotopie, méthode de décomposition d'Adomian, polynômes de Bernstein, matrice opérationnelle.

Abstract.

The objective of this work is to find the solution approach and numerically the solution of some types of integro-differential equations with homotopy analysis methods (HAM) and the Adomian decomposition method (ADM). In the numerical methods, the Legendre, and Bernstein polynomials were used. In the later, the use of the operational matrix allowed us to transform these equations into a system of algebraic equations whose solution is easy to find. Some numerical examples prove the effectiveness of the methods used to find the approximate solutions.

Keywords : Integro-Differential Equations, Homotopy Analysis Method, Adomian Decomposition Method, Bernstein polynomials, Operational matrix.

Table des matières

1	Introduction à la Théorie des équations intégrales et intégréo-différentielles	6
1.1	Les équations intégrales	7
1.1.1	Equations intégrales de Volterra	7
1.1.2	Equations intégrales de Fredholm	8
1.1.3	Relation entre les équations intégrales (<i>E.I</i>) de Volterra et les équations différentielles ordinaires (<i>E.D.O</i>) linéaires	9
1.2	Equations intégréo-différentielles	10
1.2.1	Classification des équations intégréo-différentielles (E.I-D)	11
1.2.2	Conversion d'une équation intégréo-différentielle (E.I-D) de Fredholm à une équation intégrale (E.I) de Fredholm	12
2	Existence et unicité des solutions des équations intégrales et intégréo-différentielles	14
2.1	L'existence et unicité de la solution des équation intégrale (E.I)	15
2.1.1	Contraction de l'opérateur	15
2.2	Existence et unicité de la solution des (E.I-D)	18
2.2.1	Théorème du point fixe	18
3	Résolution approchée de quelques types d'équations intégréo-différentielles	21
3.1	Méthode de transformation d'analyse Homotopie	22

3.1.1	Application de la méthode de transformée d'Homotopie sur l'équation intégral-différentielle de Volterra en utilisant l'opérateur de Laplace	23
3.1.2	Convergence de la méthode	25
3.1.3	Estimation de l'erreur	25
3.1.4	Applications numériques	26
3.2	Méthode de transformation différentielle (polynôme d'Adomian)	29
3.2.1	Polynômes d'Adomian	30
3.2.2	Application de la méthode	31
3.2.3	La convergence de la technique d'Adomian	32
3.2.4	Résolution approchée des (E.I-D) non linéaire par la transformation différentielle d'Adomian	33
3.2.5	Transformation différentielle d'une fonction non linéaire	35
3.2.6	Applications numériques	35
4	Résolution numérique des équations intégral- différentielles	40
4.1	Polynômes de Legendre	41
4.2	Résolution des équations intégral-différentielles (E.I-Ds) linéaires utilisant les polynômes de Legendre	44
4.2.1	Estimation d'erreurs	48
4.3	Polynômes de Bernstein	54
4.3.1	Approximation d'une fonction $y(x)$ et $y^p(x), p \geq 1$ par les polynômes de Bernstein	59
4.3.2	Résolution numérique des équations intégral-différentielles linéaires de Fredholm du 1 ^{er} ordre à condition mixte	61
4.3.3	Equations intégral-différentielles linéaires utilisant la matrice oppé-	

rationnelle d'intégration et de dérivation.	68
4.3.4 Equations intégro-différentielles non linéaires	74
Conclusion	82
Bibliographie	83

Introduction

Les équations Intégré- Différentielles (E.I-D) ont été étudiées pour la première fois par Vito-Volterra. Ces équations jouent un rôle très important dans plusieurs domaines tels que : La mécanique, les Mathématiques, la physique, la biologique,...etc.

Elles offrent un puissant moyen technique pour résoudre certains problèmes pratiques.

L'équation fonctionnelle que nous appellons équation intégro- différentielle (E.I.D) est sous la forme

$$\varphi^{(n)}(x) = F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) + \lambda \int_{\Omega} K(x, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) dt,$$

avec les conditions initiales

$$\varphi(\alpha) = B_0, \quad \varphi'(\alpha) = B_1, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(\alpha) = B_{n-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

- Ω ensemble mesurable, φ la fonction inconnue, K est le noyau, λ paramètre numérique et n l'ordre de l'équation ($n \in \mathbb{N}$).

- Notre thèse se compose de quatre chapitres.

- Le premier chapitre est un rappel sur les équations intégrales (E.Is) et les équations intégro- différentielles (E.I-D) linéaires et non linéaires.

- Le second chapitre nous présentons les théorèmes du point fixe qui assureront que l'équation intégro- différentielle admette une solution unique.

- Le troisième chapitre est consacré aux méthodes qui donnent la solution approchée de ces équations intégro- différentielles (E.I.D) où nous nous intéressons aux méthodes suivantes :

- Méthode de transformation d'analyse Homotopie. (H.A.TM)
- Méthode de transformation différentielle (polynôme d'Adomian) (ADTM).
 - Le quatrième chapitre on a essayé de trouver la solution numérique de certaines classes d'équations intégral-différentielles (E.I.Ds) linéaires et non linéaires, en se basant sur la méthode de collocation utilisant les polynômes de Legendre et les polynômes de Bernstein, où on a employé la matrice opérationnelle d'intégration et de dérivation avec laquelle on obtient la solution approximative sous forme des polynômes.

Avec l'étude de la convergence de la méthode choisie en estimant l'erreur qui résulte de la comparaison de la solution approchée et de la solution exacte.

Chapitre 1

Introduction à la Théorie des équations intégrales et intégréo-différentielles

1.1 Les équations intégrales

Toute équation fonctionnelle de la forme

$$\lambda\varphi(x) + f(x) = \int_E K(x, y, \varphi(y))dy, \quad (1.1)$$

est appelée équation intégrale, où φ est l'inconnue, f est une fonction donnée,

$\lambda \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), E est un ensemble fermé, borné et mesurable, d'un espace euclidien et K le noyau. On prend

$$K(x, y, \varphi(y)) = K(x, y)\varphi(y),$$

L'équation intégrale (1.1) devient

$$f(x) = \int_E K(x, y)\varphi(y)dy - \lambda\varphi(x),$$

qui est dite une équation intégrale linéaire.

Le type le plus général d'une équation intégrale linéaire est :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E K(x, y)\varphi(y)dy,$$

Une équation intégrale peut être classifiée en linéaire ou non linéaire.

Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont sous les deux principales classes, nommées équations intégrales de Volterra et équations intégrales de Fredholm.

1.1.1 Equations intégrales de Volterra

On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt,$$

où φ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre réel.

Une équation de la forme :

$$\int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x)$$

est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de premier espèce.

Equation intégrale linéaire de Volterra du second espèce est de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt,$$

- Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

et est dite équation intégrale linéaire homogène de Volterra du second espèce.

Une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme :

$$\int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

est dite équation intégrale linéaire de Volterra de premier espèce .

1.1.2 Equations intégrales de Fredholm

On appelle équation intégrale de Fredholm non linéaire du second espèce une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x) \tag{1.2}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$, $f(x)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre réel.

Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.3)$$

L'équation (1.3) est dite équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de second espèce .

1.1.3 Relation entre les équations intégrales (E.I) de Volterra et les équations différentielles ordinaires (E.D.O) linéaires

Il y a une relation fondamentale entre les équations intégrales de Volterra et les équations différentielles ordinaires.

Soit l'équation différentielle du type

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)y = F(x) \quad (1.4)$$

avec des coefficients continus, et les conditions initiales

$$y(a) = q_0, y'(a) = q_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = q_{n-1}$$

L'équation (1.4) peut être réduite à une équation intégrale de Volterra du second espèce

$$u(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt = f(x)$$

Pour arriver à cette équation intégrale, on utilise la transformation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x)$$

d'où, par intégration par rapport à x de a à x , on obtient

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_a^x u(t)dt + q_{n-1}$$

et les intégrales successives sont

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} &= \int_a^x \int_a^{x_1} u(x) dx dx_1 + q_{n-1}x + q_{n-2} \\ \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} &= \int_a^x \int_a^{x_2} \int_a^{x_1} u(x) dx dx_1 dx_2 + q_{n-1} \frac{x^2}{2!} + q_{n-2}x + q_{n-3} \\ \dots &= \dots\end{aligned}$$

et en procédant de la même manière, on obtient

$$y(x) = \int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} u(x_1) dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t) dt$$

En retournant à l'équation différentielle (1.4), on voit qu'on peut l'écrire comme suit

$$u(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt = f(x)$$

ou

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

et

$$\begin{aligned}f(x) &= F(x) - q_{n-1}a_1(x) - [(x-a)q_{n-1} + q_{n-2}]a_2(x) \\ &\quad - \dots - \left(q_{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + q_1(x-a) + q_0 \right) a_n(x)\end{aligned}$$

1.2 Equations intégrro-différentielles

Une équation intégrro-différentielle (E.I.D) est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles dont la fonction inconnue est φ (voir [22] et [8]).

La forme générale d'une équations intégral-différentielle non linéaire d'ordre n est

$$\varphi^{(n)}(x) = F \left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x), \lambda \int_E K(x, t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) dt \right) \quad (1.5)$$

Avec les conditions initiales

$$\varphi(\alpha) = \beta_0, \varphi'(\alpha) = \beta_1, \varphi''(\alpha) = \beta_2, \dots, \varphi^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}$$

telle que $\alpha \in T$ et β_i ($0 \leq i \leq n-1$) nombres donnés et φ est la fonctions inconnue.

La forme linéaire d'une équation intégral-différentielle (E.I.D) d'ordre n est

$$L_x(\varphi) = \lambda \int_T K(x, t) M_t(\varphi) + f(x) \quad (1.6)$$

où

$$L_x(\varphi) = \sum_{i=0}^n a_i(x) \varphi^{(i)}(x) \text{ et } M_t(\varphi) = \sum_{j=0}^m b_j(t) \varphi^{(j)}(t).$$

$a_i(x), b_j(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions données et ($0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$).

1.2.1 Classification des équations intégral-différentielles (E.I.D)

Une importante classification des (E.I.D) existe, et sont classées par leurs caractéristiques en cinq types suivants (voir [22]) :

Les limites de l'intégration

On distingue trois types majeurs de l'équation intégral-différentielle.

- Si les limites de l'intégration sont fixées, alors l'équation intégral-différentielle est dite de Fredholm :

$$L_x(\varphi) = \lambda \int_a^b K(x, t) M_t(\varphi) + f(x).$$

- Si $b = x$ alors l'E.I-D est de Volterra :

$$L_x(\varphi) = \lambda \int_a^x K(x, t) M_t(\varphi) + f(x).$$

- Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra coïncident alors l'équation intégral-différentielle est dite de Fredholm -Volterra.

$$L_x(\varphi) = \lambda_1 \int_a^b K_1(x, t) M_t(\varphi) + f(x) + \lambda_2 \int_a^x K_2(x, t) M_t(\varphi) + f(x).$$

1.2.2 Conversion d'une équation intégral-différentielle (E.I-D) de Fredholm à une équation intégrale (E.I) de Fredholm

Soit l'équation intégral-différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(s) = a(s)y(s) + b(s) + \int_0^1 K(s,t)y(t)dt, \\ y(0) = \alpha, \quad 0 \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (1.7)$$

où $a(s), b(s)$ et $K(s, t)$ sont des fonctions continues sur $[0, 1]$

si on pose : $y'(s) = z(s)$, on obtient :

$$y(s) = \alpha + \int_0^s z(t)dt \quad (1.8)$$

Substituons (1.8) dans (1.7) on trouve :

$$z(s) = a(s) \left[\alpha + \int_0^s z(t)dt \right] + b(s) + \int_0^1 K(s,t) \left[\alpha + \int_0^t z(u)du \right] dt,$$

alors on obtient

$$z(s) = g(s) + a(s) \int_0^s z(t)dt + \int_0^1 K(s,t) \int_0^t z(t)dt,$$

On pose

$$z(s) = g(s) + h(s),$$

tel que

$$\begin{aligned} g(s) &= \alpha a(s) + b(s) + \alpha \int_0^1 K(s,t)z(t)dt, \\ h(s) &= a(s) \int_0^s z(t)dt + \int_0^1 K(s,t) \left(\int_0^t z(u)du \right) dt, \end{aligned}$$

on a

$$\int_0^1 K(s,t) \left(\int_0^t z(u)du \right) dt = \int_0^1 \left(\int_0^t K(s,u)du \right) z(t)dt$$

on pose

$$\begin{aligned}K'(s, t) &= \int_t^1 K(s, u) du, \\h(s) &= a(s) \int_0^s z(t) dt + \int_0^1 K'(s, t) z(t) dt \\h(s) &= \int_0^1 (a(s) \cdot H(s - t) + K'(s, t)) z(t) dt\end{aligned}$$

tel que

$$H(s, t) = \begin{cases} 1, & s - t \geq 0 \\ 0, & s - t < 0 \end{cases}$$

on pose

$$a(s) \cdot H(s - t) + K'(s, t) = \eta(s, t).$$

on obtient l'équation intégrale de Fredholm :

$$z(s) = g(s) + \int_0^1 \eta(s, t) z(t) dt.$$

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions des équations intégrales et intégro-différentielles

2.1 L'existence et unicité de la solution des équation intégrale (E.I)

2.1.1 Contraction de l'opérateur

Soit l'opérateur intégral du second ordre (voir [36])

$$u - Au = f.$$

L'unicité et l'existence de la solution peut être donnée par la série de "Neumann" pourvu que l'opérateur A soit une contraction $\|A\| < 1$.

Théorème 2.1.1 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans X . Alors $(I - A)$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann*

$$\|(I - A)^{-1}\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$$

de plus

$$\|I - A\|^{-1} \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Théorème 2.1.2 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$ et soit I l'opérateur identique dans X . Alors pour tout $f \in X$ l'approximation successive*

$$u_{n+1} = Au_n + f$$

avec u_0 un vecteur arbitraire de X , converge vers une unique solution de l'équation

$$u - Au = f$$

Corollaire 2.1.3 *Soit K un noyau continu vérifiant la relation max*

$$\max \int_G |K(x, y)| dy < 1$$

Alors pour tout $f \in X$, l'équation intégrale du second espèce

$$u(x) - \int_G K(x, y)u(y)dy = f(x)$$

admet une solution unique $u \in C(G)$, de plus l'approximation successive

$$u_{n+1}(x) = \int_G K(x, y)u_n(y)dy + f(x)$$

converge uniformément vers la solution u pour tout vecteur arbitraire u_0 de $C(G)$.

Théorème 2.1.4 Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même, alors pour que l'équation non homogène

$$Tu = u - Au = f$$

admette une solution unique $u \in X$ pour tout $f \in X$, il suffit que l'équation homogène

$$Tu = u - Au = 0$$

admette la solution triviale

$$u = 0$$

Théorème 2.1.5 (Alternative de Fredholm)

Soit A un opérateur compact défini sur un espace de Hilbert X à valeurs dans X et soit l'équation

$$u - Au = f \tag{2.1}$$

et son adjoint

$$v - A^*v = g \tag{2.2}$$

Alors les équations (2.1) et (2.2) admettent la solution unique pour tout second membre si les équations homogènes

$$u - Au = 0$$

$$v - A^*v = 0$$

possèdent et uniquement les solutions triviales $u = 0$ et $v = 0$.

Ou bien les équations homogènes possèdent le même nombre fini des solutions linéairement indépendantes u_1, u_2, \dots, u_n et $v_1; v_2; \dots; v_n$ respectivement et les équations (2.1) et (2.2) sont solvable si seulement si on a

$$\begin{aligned}\langle f, v_k \rangle &= 0 \\ \langle g, u_k \rangle &= 0, \forall k = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

La solution générale de (2.1) est donnée par

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$$

Celle de l'équation (2.2) est

$$v = v_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$$

où u_0, v_0 sont des solutions particulières des équations (2.1) et (2.2) respectivement et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des constants arbitraires.

Théorème 2.1.6 Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et K un noyau continu sur I .

Alors l'équation intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt$$

admet une unique solution.

Théorème 2.1.7 Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact $K : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$

où K est une fonction continue sur $I \times I$ et E est l'espace des fonctions réelles continues sur I muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et soit $f \in E$. Si

$$((b - a) \|K\|_\infty < 1).$$

Alors l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt, \quad x \in I$$

admet une unique solution.

2.2 Existence et unicité de la solution des (E.I-D)

2.2.1 Théorème du point fixe

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème du point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.

Dans cette section nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la définition d'un point fixe.

Définition 2.2.1 *Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. On appelle point fixe de f tout point $u \in E$ tel que*

$$f(u) = u$$

Rappelons que le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe.

Théorème du point fixe métrique

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 2.2.2 (Picard)

Soient (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \rightarrow E$ une application contractante, i.e Lipschitzienne de rapport $k < 1$. Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} := \varphi(x_p)$ converge vers a .

Théorème 2.2.3 Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach X , tel que T^n est contractant sur X , pour un entier positif n , alors T a un point fixe unique.

Lemme 2.2.4 Soit l'opérateur T tel que $T : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$, u et $v \in C([a, b])$ et $L \in \mathbb{R}_+^*$ est le constant de Lipschitz de la fonction K au troisième variable,

$$K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors

$$\|T^p(u) - T^p(v)\|_\infty \leq \frac{L^p(b-a)^{2p}}{p!} \|u - v\|_\infty,$$

et l'équation intégrale-différentielle de Fredholm

$$\begin{cases} \varphi(x) = g(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt, & x \in [a, b] \\ \varphi(a) = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.3)$$

admet une seule solution φ point fixe.

Théorème 2.2.5 (Schauder) (voir [17])

Soit X un espace de Banach et $E \subset X$, E convexe et fermé, et $T : E \rightarrow E$ avec T complètement continu, alors T admet un point fixe.

Théorème 2.2.6 Supposons que $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, $K \in C[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ tel que

$$\int_{t_0}^t K(r, s, u(s)) dr \leq N$$

pour $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \alpha$ avec $u \in H_0 = \{\phi \in C[J \times \mathbb{R}^n] : \phi(t_0) = u_0 \text{ et } |\phi(t) - u_0| \leq b\}$, pour certain $0 < \alpha \leq a$. Alors l'équation intégrale-différentielle de Volterra

$$\begin{cases} u(x) = f(t, x(t)) + \int_s^t K(t, s, u(t)) dt, \\ \phi(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

admet une solution unique.

Théorème 2.2.7 (Tychonoff)

Soit B un espace complet, localement convexe, et B_0 un sous-ensemble convexe fermé de B . Soit la cartographie $T : B \rightarrow B$ continue et $T(B_0) \subset B_0$. Si la fermeture de $T(B_0)$ est compact alors T a un point fixe dans B_0 .

Théorème 2.2.8 supposons que

$$i) f \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}], \quad g \in C[\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+]$$

$g(t, u)$ monotone non décroissante dans u .

$$|f(t, u)| \leq g(t, |x|) \quad t, x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$$

$$ii) K \in C[\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n], \quad G \in C[\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+]$$

$G(t, s, u)$ monotone non décroissante dans u pour $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$ et

$$|K(t, s, x(t))| \leq G(t, s, |x(t)|), \quad (t, s, x) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^n$$

iii) pour $(u_0 > 0)$ l'équation intégro-différentielle

$$\begin{cases} u'(t) = g(t, u(t)) + \int_0^t G(t, s, u(s)) ds \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

admet une solution $u(t)$ pour $t > t_0$

iv) $\int_1^t K(\zeta, s, x(s)) d\zeta < N$ pour $t, s \in \mathbb{R}, x \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n], x_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que $|x_0| < x_0$
l'équation intégro-différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) + \int_{t_0}^t K(t, s, x(s)) ds \\ x(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

admet une solution $x(t)$ satisfie $|x(t)| < u(t), t > t_0$

Chapitre 3

Résolution approchée de quelques types d'équations intégré-différentielles

3.1 Méthode de transformation d'analyse Homotopie

Cette méthode a été prouvée comme l'une des techniques pour résoudre de nombreuses équations fonctionnelles linéaires et non linéaires. Avant de donner le principe de cette méthode avec des exemples appliqués sur les (E.I-Ds), on présente un tout petit peu d'Homotopie.

Définition 3.1.1 *Applications Homotopies (voir [26])*

On se donne deux espaces topologiques X et Y , deux fonctions continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont dites homotopes (dans Y) s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que

$$\forall x \in X, H(x, 0) = f(x)$$

$$\forall x \in X, H(x, 1) = g(x)$$

on dit alors que H est une homotopie de f à g

Autrement dit, selon les valeurs du paramètre t , la fonction H passe continûment de f pour ($t = 0$) et (pour $t = 1$). Chaque valeur du paramètre t correspond à une fonction : $h_t : X \rightarrow Y, x \mapsto H(x, t)$ " située entre f et g ".

Une autre manière de le voir est que pour chaque $x \in X$, la fonction H définit un chemin γ_x reliant $f(x)$ à $g(x)$.

$$\gamma_x : [0, 1] \rightarrow Y, t \mapsto H(x, t)$$

Exemple 3.1.2 *On prend $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, f(x) = 1$ et $g(x) = -1$ alors f et g sont homotopes dans Y via la fonction continue :*

$$H(x, t) = 1 - 2t$$

(à noter que dans cet exemple, rien ne dépend de la variable x , ce qui est exceptionnel...).

NB : La mention "homotope dans Y " peut s'avérer très importante : en effet dans l'exemple précédent si on remplace $Y = \mathbb{R}$ par le sous-espace $Y' = \mathbb{R}^*$, f et g sont toujours

à valeurs dans Y' mais elles ne sont pas homotopes dans Y' , car il n'existe pas la fonction continue reliant -1 à 1 dans \mathbb{R}^* (voir le théorème des valeurs intermédiaires).

Exemple 3.1.3 On prend $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{C}$, $f(x) = e^{2i\pi x}$ et $g(x) = 0$, f décrit un cercle de rayon unité autour de l'origine : g reste à l'origine. Alors f et g sont homotopes via la fonction continue : $H(x, t) = (1 - t) e^{2i\pi x}$
(pour chaque valeur de t la fonction $h_t(x) = H(x, t)$ décrit un cercle de rayon $1 - t$ autour de l'origine).

- L'équation de déformation d'ordre zéro qui est définie par le Mathématicien Liao

$$(1 - q) \mathcal{L} [H(x, q) - y_0(x)] = hqN [H(x, q)], \quad q \in [0, 1]$$

N : un opérateur non linéaire

\mathcal{L} : opérateur de Laplace

3.1.1 Application de la méthode de transformée d'Homotopie sur l'équation intégral-différentielle de Volterra en utilisant l'opérateur de Laplace

Soit l'équation intégral-différentielle de Volterra (voir [31])

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) y(t) dt, \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = \alpha_0, \quad y'(0) = \alpha_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}$$

\mathcal{L} : l'opérateur de Laplace.

$$\mathcal{L} [y^{(n)}(x)] = \mathcal{L} [f(x)] + \mathcal{L} \left[\int_0^x K(x, t) y(t) dt \right]$$

- On définit l'équation non linéaire N comme suit

$$N [H(x, q)] = \mathcal{L} [H^{(n)}(x, q)] - \mathcal{L} [f(x)] - \mathcal{L} \left[\int_0^x K(x, t) \cdot H(t, q) dt \right]$$

telle que $q \in [0, 1]$.

On note que l'opérateur non linéaire N vérifie $N [y(x)] = 0$, où $y(x)$ est une fonction inconnue de l'équation (E.I-D).

- Montrons que $y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x)$.

Par le développement de Taylor de $H(x, q)$ on a

$$H(x, q) = H(x, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot \left. \frac{\partial^m H(x, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \cdot q^m.$$

on pose

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \cdot \left. \frac{\partial^m H(x, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}$$

On obtient

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x), \text{ avec } y_0 = H(x_0, q)$$

On a

$$(1 - q) \mathcal{L} [H(x, q) - y_0(x)] = qhN [H(x, q)] \quad (3.2)$$

la dérivée de (3.2) donne

$$\begin{aligned} & -\mathcal{L} [H(x, q) - y_0(x)] + (1 - q) \mathcal{L} \left[\frac{\partial H(x, q)}{\partial q} \right] \\ & = hN [H(x, q)] + qh \cdot \frac{\partial N [H(x, q)]}{\partial q} \end{aligned}$$

pour $q = 0$, on obtient

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial H(x, 0)}{\partial q} \right] = hN [H(x, 0)]$$

On a

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \cdot \left. \frac{\partial^m H(x, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}$$

$m = 1$, on obtient

$$y_1(x) = \frac{1}{1!} \cdot \left. \frac{\partial H(x, q)}{\partial q} \right|_{q \equiv 0}$$

$$\vec{y}_m = (y_0(x), y_1(x), \dots, y_m(x)).$$

l'équation de déformation d'ordre m est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_m(x) - X_m y_{m-1}(x)] &= h R_m(y_{m-1}(x)) \\ R_m(y_{m-1}(x)) &= \frac{1}{(m-1)!} \cdot \left. \frac{\partial^m N[H(x, q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q \equiv 0} \\ X_m &= \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \\ y(x) &= \sum_{m=0}^M y_m(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

pour $M \rightarrow \infty$, on obtient une approximation précise de l'équation originale.

3.1.2 Convergence de la méthode

Définition 3.1.4 (voir [8] et [31]) Soit $\varphi_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$. L'approximation successive de la solution $y(x)$ du problème si les constantes positives P, L existent telle que

$$L = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\varphi_{m+1}(x_i) - y(x_i)|}{|\varphi_n(x_i) - y(x_i)|^P}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Alors la méthode converge.

P : l'ordre de la convergence.

L : facteur de la convergence.

3.1.3 Estimation de l'erreur

Définition 3.1.5 (voir [31]) L'erreur relative δ_n de n termes d'approximation de (HATM) est donnée par

$$\delta_n = \frac{|u_{exacte}(x) - u_{approché}(x)|}{|u_{exacte}(x)|}$$

L'erreur maximale est définie par

$$E_n = \|y_{exact}(x) - \varphi_n(x)\|_\infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

où n est le nombre d'itérations.

3.1.4 Applications numériques

Nous utilisons la méthode proposée pour trouver la solution approximative de l'E.I-D suivante (voir [31])

$$\begin{cases} y''(x) = e^x - x + \int_0^1 xty(t)dt \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

La solution exacte est

$$y(x) = e^x$$

En prenant la transformée de Laplace de deux côtés de l'équation (3.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''(x)] &= \mathcal{L}[e^x - x] + \frac{1}{s^2} \int_0^1 ty(t)dt \\ s^2 \mathcal{L}[y(x)] - sy(0) - y'(0) - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \int_0^1 ty(t)dt &= 0. \end{aligned}$$

Avec la condition initiale de (3.4) on obtient

$$L[y(x)] - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2(s-1)} + \frac{1}{s^4} - \frac{1}{s^4} \int_0^1 ty(t)dt = 0.$$

on définit une équation non linéaire N

$$N[H(x, t; q)] = \mathcal{L}[H(x, t; q)] - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^2(s-1)} \right) - \frac{1}{s^4} \int_0^1 t[\varphi(x, t; q)] dt = 0.$$

L'équation de déformation de m -ème ordre est

$$y_m(x, t) = X_m y_{m-1}(x, t) + h \mathcal{L}^{-1} (R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t))),$$

telle que

$$R_m(\vec{y}_{m-1}) = \mathcal{L}[y_{m-1}] - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^2(s-1)} \right) (1 - X_m) - \frac{1}{s^4} \int_0^1 t y_{m-1} dt.$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0, & y_1(x) &= -e^x h + \frac{hx^3}{6}, \\ y_2(x) &= -e^x h(1+h) + \frac{h(30+59h)x^3}{180}, \\ y_3(x) &= -e^x h(1+h)^2 + \frac{h(900+h(3540+2611h))x^3}{5400}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pour $h = -1$ la solution est

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x) = e^x - \frac{x^3}{3!30^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \\ y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^x - \frac{x^3}{3!30^{n-1}} \right) = e^x \end{aligned}$$

Exemple 3.1.6 Soit le problème

$$\begin{cases} y^{(8)}(x) = -8e^x + x^2 + y(x) + \int_0^1 x^2 y(t) dt, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1, y^{(3)}(0) = -2 \\ y^{(4)}(0) = -3, y^{(5)}(0) = -4, y^{(6)}(0) = -5, y^{(7)}(0) = -6 \end{cases} \quad (3.6)$$

La solution exacte est $y(x) = e^x - xe^x$

On applique la transformation de Laplace, des deux côtés de (3.6)

$$\begin{aligned}
L[y^{(8)}(x)] &= L[-8e^x + x^2] + L[y(x)] + \frac{2}{s^3} \int_0^1 y'(t) dt \\
s^8 \mathcal{L}[y(x)] - s^7 y(0) - s^6 y'(0) - s^5 y''(0) - s^4 y^{(3)}(0) - s^3 y^{(4)}(0) \\
&- s^2 y^{(5)}(0) - s y^{(6)}(0) - y^{(7)}(0) + \frac{8}{(s-1)} - \frac{2}{s^3} \\
&- \mathcal{L}[y(x)] - \frac{2}{s^3} \int_0^1 y'(t) dt = 0
\end{aligned}$$

et avec la condition initiale

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y(x)] + \left(-\frac{s^7}{(s^8-1)} + \frac{s^5}{(s^8-1)} + \frac{2s^4}{(s^8-1)} + \frac{3s^3}{(s^8-1)} + \frac{4s^2}{(s^8-1)}\right. \\
\left. + \frac{5s}{(s^8-1)} + \frac{6}{(s^8-1)} + \frac{8}{(s^8-1)(s-1)} - \frac{2}{s^3(s^8-1)}\right) - \frac{2}{s^3(s^8-1)} \int_0^1 y'(t) dt = 0
\end{aligned}$$

On définit l'équation non linéaire N comme suit

$$\begin{aligned}
N[H(x, t; q)] &= \mathcal{L}[H(x, t; q)] + \left(-\frac{s^7}{(s^8-1)} + \frac{s^5}{(s^8-1)} + \frac{2s^4}{(s^8-1)} + \frac{3s^3}{(s^8-1)} + \frac{4s^2}{(s^8-1)}\right. \\
&\left. + \frac{5s}{(s^8-1)} + \frac{6}{(s^8-1)} + \frac{8}{(s^8-1)(s-1)} - \frac{2}{s^3(s^8-1)}\right) - \frac{2}{s^3(s^8-1)} \int_0^1 y'(t) dt = 0
\end{aligned}$$

L'équation de déformation du m -ème ordre

$$y_m(x, t) = X_m y_{m-1}(x, t) + h \mathcal{L}^{-1}(R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t)))$$

telle que

$$\begin{aligned}
R_m(\vec{y}_{m-1}) &= \mathcal{L}[y_{m-1}] + \left(-\frac{s^7}{(s^8-1)} + \frac{s^5}{(s^8-1)} + \frac{2s^4}{(s^8-1)} + \frac{3s^3}{(s^8-1)} + \frac{4s^2}{(s^8-1)}\right. \\
&\left. + \frac{5s}{(s^8-1)} + \frac{6}{(s^8-1)} + \frac{8}{(s^8-1)(s-1)} - \frac{2}{s^3(s^8-1)}\right) - \frac{2}{s^3(s^8-1)} \int_0^1 y'(t) dt = 0
\end{aligned}$$

Donc on trouve

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 0 \\
y_1(x) &= e^x h x + h x^2 + \frac{1}{2} h \left(\cos[x] - 3 \cosh[x] - 2 \sinh[x] - 2 \sin\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right] \sinh\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(x) = e^x h (1 + h) - \frac{ht^2 \left(h + e \left(-4 + h \left(e - 2 \left(6 + \cos[1] - 2 \sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \sinh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right) \right) \right) \right)}{4e} \\
+ \frac{h \left(\cosh[x] \left(h + e \left(-12 + h \left(-20 + e - 2 \cos[1] + 4 \sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \sinh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right) \right) \right) \right)}{8e} \\
- \frac{8e(1+h \sinh[x]) - \left(h + e \left(-4 + h \left(-12 + e - 2 \cos[1] + 4 \sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \sinh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right) \right) \right)}{8e} \\
\frac{\left(\cos[x] - 2 \sin \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \sinh \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)}{8e}
\end{aligned}$$

Pour $h = -1$ on aura la solution

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x) = e^x - x e^x,$$

3.2 Méthode de transformation différentielle (polynôme d'Adomian)

Résolution approchée des (EDOs) non linéaires (BVPs) par la méthode de décomposition d'Adomian et les (E.I-Ds) non linéaires par la transformée différentielle (polynômes d'Adomian)

Le but de ce travail est de trouver la solution approchée de quelques types d'équations différentielles (EDOs) non linéaires a valeurs au bords (BVP) en utilisant la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) (voir [10]).

Pour plus d'information nous abordons le traitement des équations intégro-différentielles (E.I-Ds) non linéaires par la méthode de transformée différentielle, cette technique consiste à remplacer le terme non linéaire par les polynômes d'Adomian pour l'indice k , et les autres termes de l'équation donnée par la relation recurrente pour les composantes de transformée différentielle pour le même but.

3.2.1 Polynômes d'Adomian

On utilise les polynômes d'Adomian pour trouver $y(x)$, solution d'une équation non linéaire notée $g(y)$, telle que (voir [10] et [13])

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x), \quad g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

g : opérateur non linéaire

$A_n, (n \geq 0)$: polynômes d'Adomian donnés par la formule

$$A_0 = g(y_0), \quad A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \left[g \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i \right) \right] \right]_{\lambda=0}$$

Les six premiers polynômes d'Adomian (voir [17])

$$\begin{aligned} A_0 &= g(y_0) \\ A_1 &= y_1 g^{(1)}(y_0) \\ A_2 &= y_2 g^{(1)}(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^{(2)} g^{(2)}(y_0) \\ A_3 &= y_3 g^{(1)}(y_0) + y_1 y_2 g^{(2)}(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^{(3)} g^{(3)}(y_0) \\ A_4 &= y_4 g^{(1)}(y_0) + (y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_1^2) g^{(2)}(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 g^{(3)}(y_0) + \frac{1}{4!} y_1^4 g^{(4)}(y_0) \\ A_5 &= y_5 g^{(1)}(y_0) + (y_2 y_3 + y_1 y_4) g^{(2)}(y_0) + \frac{1}{2!} (y_1^2 y_3 + y_1 y_2^2) g^{(3)}(y_0) \\ &\quad + \frac{1}{3!} y_1^3 y_2 g^{(4)}(y_0) + \frac{1}{5!} y_1^5 g^{(5)}(y_0) \end{aligned} \tag{3.7}$$

alors on a la relation récurrente suivante

$$A_0 = g(y_0), \quad A_n = \sum_{k=0}^n C_n^k g^{(k)}(y_0), \quad n \geq 1$$

les coefficients C_n^k définies par (voir [12] et [15])

$$\begin{aligned} C_n^k &= y_n, \quad n \geq 1 \\ C_n^k &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-k} (j+1) y_{j+1} C_{n-1-j}^{k-1}, \quad (2 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

3.2.2 Application de la méthode

Soit le problème (BVP) du deuxième ordre suivant (voir [19] et [24])

$$\begin{cases} Ly = g(y) + f(x), & (a \leq x \leq b) \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta \end{cases} \quad (3.8)$$

telle que

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

$f(x)$: fonction continue

$g(y)$: fonction analytique non linéaire.

$$L^{-1}(\bullet) = \int_a^x \int_a^{t_2} (\bullet) dt_1 dt_2$$

on applique L^{-1} sur les deux côtés de l'équation (3.8), on obtient

$$y(x) - y(a) - y'(a)(x - a) = L^{-1}(g(y)) + L^{-1}(f(x)) \quad (3.9)$$

soit ($x = b$), on obtient

$$y'(a) = \frac{y(b) - y(a) - [L^{-1}(g(y))]_{x=b} - [L^{-1}(f(x))]_{x=b}}{(b - a)}$$

tel que

$$[L^{-1}(\bullet)]_{x=b} = \int_a^b \int_a^b (\bullet) dt_1 dt_2 \quad (3.10)$$

substituons équation (3.10) dans l'équation (3.9), on a

$$\begin{aligned} y(x) &= y(a) + \frac{y(b) - y(a)}{(b - a)}(x - a) - \frac{x - a}{b - a} [L^{-1}g]_{x=b} \\ &\quad + L^{-1}f + L^{-1}Ny - \frac{x - a}{b - a} [L^{-1}g]_{x=b} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$y_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x), \quad g_u(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$\begin{cases} y_0 = y(a) + \frac{y(b)-y(a)}{(b-a)}(x-a) - \frac{x-a}{x-b} [L^{-1}f]_{x=b} + L^{-1}g \\ y_{n+1} = L^{-1}A_n - \frac{x-a}{x-b} [L^{-1}A_n]_{x=b}, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

3.2.3 La convergence de la technique d'Adomian

Soit l'opérateur non linéaire g d'un espace de Hilbert H dans lui même, pour toute série $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ convergente on définit $g(y)$ par (voir [10] et [21])

$$g(y) = \sum_{i=0}^n A_i(y_1, y_2, \dots, y_i)$$

La méthode devient à déterminer la suite $(S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ à l'aide du schéma itératif suivant

$$S_{n+1} = g(y_0 + S_n), \quad S_0 = 0$$

Alors il y a donc l'équivalence de la technique d'Adomian et la relation qui correspond a la résolution de l'équation $S = g(y_0 + S)$ qui conduit au problème du point fixe.

- Si g est contractante ($\|g\| < 1$) alors la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge à l'unique solution de l'équation $g(y_0 + S) = S$ on a en plus $y_n = (S_n - S_{n-1}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ (voir [23]).

Exemple 3.2.1 (voir [21])

On considère le problème (BVP) suivante

$$\begin{cases} y''(x) = e^y, & (0 \leq x \leq 1) \\ y(0) = 1, & y(1) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

la solution exacte est

$$y^*(x) = 2 \ln(k \sec \frac{k(2x-1)}{4}) - \ln(2),$$

telle que k satisfie $k \sec \frac{k}{4} = \sqrt{2}$

on a

$$\begin{aligned} y(x) &= y(a) + \frac{y(b) - y(a)}{(b-a)}(x-a) - \frac{x-a}{b-a} [L^{-1}g]_{x=b} \\ &+ L^{-1}g + L^{-1}g(y) - \frac{x-a}{b-a} [L^{-1}g(y)]_{x=b} \end{aligned}$$

de même on a

$$f(x) = 0, \quad g(y) = e^y, \quad (b = 1, \quad a = 0)$$

telle que

$$L^{-1} = \int_0^x \int_0^{t_2} (\bullet) dt_1 dt_2$$

Les polynômes d'Adomian de la fonction $g(y) = e^y$ sont

$$A_0 = g(y_0) = e^{y_0}$$

$$A_1 = e^{y_0} y_1$$

$$A_2 = e^{y_0} \left(y_2 + \frac{y_1^2}{2} \right)$$

$$A_3 = e^{y_0} \left(\frac{y_1^3}{6} + y_1 y_2 + y_3 \right)$$

$$A_4 = e^{y_0} \left(\frac{y_1^4}{24} + \frac{1}{2} y_1^2 y_2 + \frac{y_1^2}{2} + y_1 y_3 + y_4 \right), \dots$$

on a

$$y_0 = 0,$$

$$y_n = L^{-1} A_{n-1} - x [L^{-1} A_{n-1}]_{x=1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

où on obtient

$$y_1 = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2 = \frac{x}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24},$$

$$y_3 = -\frac{x}{160} = \frac{x^3}{144} + \frac{x^4}{96} + \frac{x}{24} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{180}, \dots$$

La solution approchée est

$$\tilde{y}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24} - \frac{x}{160} + \frac{x^3}{144} + \frac{x^4}{96} + \frac{x}{24} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{180} + \dots$$

3.2.4 Résolution approchée des (E.I-D) non linéaire par la transformation différentielle d'Adomian

La transformation de la k -ième dérivée d'une fonction d'une seule variable est (voir [6])

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=x_0}, \quad (3.13)$$

la transformée inverse est définie par

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) (x - x_0)^k.$$

Dans ce travail nous utilisons une lettre miniscule pour les fonctions originales et une lettre majuscule pour la transformée de la fonction.

On a les résultats suivants (voir [1], [3] et [9])

Théorème 3.2.2 *On a les résultats suivants*

1) Si $y(x) = f(x) \pm h(x)$, alors $Y(k) = F(k) \pm H(k)$.

2) Si $y(x) = cf(x)$, alors $Y(k) = cF(k)$ telle que c est constante.

3) Si $y(x) = f^{(n)}(x)$, alors $Y(k) = \frac{(k+n)!}{k!} F(k)$.

4) Si $y(x) = f(x)h(x)$, alors $Y(k) = \sum_{k_1=0}^k F(k_1)H(k - k_1)$.

5) Si $y(x) = x^m$, alors $Y(k) = \delta(k - m)$, telle que $\delta(k - m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$.

6) Si $y(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, alors $Y(k) = \frac{F(k-1)}{k}$, $k \geq 1$.

7) Si $y(x) = \int_{x_0}^x f_1(t)f_2(t)dt$, alors $Y(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} F_1(k_1)F_2(k - k_1 - 1)$, $k \geq 1$.

8) Si $y(x) = f(x) \int_{x_0}^x h_1(t)h_2(t)dt$, alors $Y(k) = \sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} H_1(k_1 - 1) H_2(k_2 - k_1) H_1(k - k_2)$, $k \geq 1$.

$y(x) = e^{\lambda x}$ alors $Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$, λ constante

$y(x) = \cos(\omega x + \alpha)$, $Y(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$

$y(x) = \sin(\omega x + \alpha)$, $Y(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$

La relation suivante est utile dans la solution des équations intégrales de Fredholm, elle peut être obtenue à partir de (7).

$$\int_a^b f_1(t)f_2(t)dt = \sum_{k_1=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} \left[(b - x_0)^k - (a - x_0)^k \right] \sum_{k_1=0}^{k-1} F_1(k_1)F_2(k - k_1 - 1) \right\}$$

3.2.5 Transformation différentielle d'une fonction non linéaire

g : opérateur non linéaire

$g(y)$: fonction analytique non linéaire, alors (voir [6])

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \left[g \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i \right) \right] \right]_{\lambda=0} \quad (3.14)$$

A_n : polynômes d'Adomian.

Ainsi les composantes de la transformée différentielle de $g(y)$ sont calculées en utilisant leurs propriétés. Pour $x = 0$ on a

$$\begin{aligned} G(0) &= g(Y(0)) \\ G(1) &= Y(1)g^{(1)}(Y(0)) \\ G(2) &= Y(2)g^{(1)}(Y(0)) + \frac{1}{2!}Y^2(1)g^{(2)}(Y(0)) \\ G(3) &= Y(3)g^{(1)}(Y(0)) + Y(1)Y(2)g^{(2)}(Y(0)) + \frac{1}{3!}Y^3(1)g^{(3)}(Y(0)) \\ G(4) &= Y(4)g^{(1)}(Y(0)) + (Y(1)Y(3) + \frac{1}{2!}Y^2(2))g^{(2)}(Y(0)) + \frac{1}{2!}Y^2(1)Y(2)g^{(3)}(Y(0)) \\ &\quad + \frac{1}{4!}Y^4(1)g^{(4)}(Y(0)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2.6 Applications numériques

Appliquons la méthode proposée sur les exemples suivants avec des types non linéaires.

Exemple 3.2.3 (voir [6])

On considère l'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra

$$y''(x) + y'(x)y(x) + y(x) = \cos 2x + x^3 - x^2 \int_0^x \frac{1 + \sin 2t}{y^2(t)} dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.16)$$

avec condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$, la transformée différentielle de l'équation

$$Y(k+2) = \frac{k!}{(k+2)!} \left[\frac{2^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \delta(k-3) \right] \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{m=0}^k (m+1) Y(m+1) Y(k-m) - Y(k) - \frac{G(k-3)}{k-2} \\ & - \frac{1}{k-2} \sum_{m=1}^{k-2} \frac{2^{m-1}}{(m-1)!} \sin\left(\frac{\pi(m-1)}{2}\right) G(k-m-2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

telle que $G(k)$ sont des transformées différentielles (polynômes d'Adomian) de la fonction non linéaire $g(y) = y^{-2}$ et la condition initiale $Y(0) = 1$ et $Y(1) = 1$, utilisant la relation (3.16) le polynôme d'Adomian pour la fonction non linéaire

$$G(0) = g(Y(0)) = 1$$

$$G(1) = -2Y(1)$$

$$G(2) = -2Y(2) + 3Y^2(1)$$

$$G(3) = -2Y(3) + 6Y(1)Y(2) - 4Y^3(1)$$

$$G(4) = -2Y(4) - 2Y(1)Y(3) - Y^2(2) + 3Y^2(1)Y(2) + 5Y^4(1)$$

En utilisant la transformée inverse, on obtient la solution approximative

$$y(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + O(x^{10})$$

alors

$$y(x) = \sin x + \cos x$$

x	Abs. rel. err. (5 Termes)	Abs. rel. err. (10 Termes)	Abs. rel. err. (15 Termes)
0.2	$7.75099E-08$	0	0
0.4	$4.57623E-06$	$7.74161E-13$	0
0.6	$5.02971E-05$	$6.19746E-11$	0
0.8	$2.83721E-04$	$1.41455E-11$	$1.25621E-15$

Comparaison numérique des résultats dans l'exemple 3.2.3

Exemple 3.2.4 (voir [6])

On considère l'équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra

$$y''(x) - 6y(x) = -4 + 8 \int_0^x ty(t) \ln y(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.19)$$

telle que les conditions initiales

$$y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0 \quad (3.20)$$

On applique la transformée différentielle pour l'équation (3.19), on obtient

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) - 6Y(k) = -4\delta(k) + \frac{8}{k}G(k-2) \quad (3.21)$$

telle que $G(k)$ sont polynômes d'Adomian de la fonction non linéaire $g(y) = y \ln y$.

substituons $k = 0$, $k = 1$ dans l'équation (3.21), on obtient

$$2Y(2) - 6Y(0) = -4$$

$$6Y(3) - 6Y(1) = 0$$

pour $k \geq 2$ l'équation (3.21) devient

$$Y(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[6Y(k) + \frac{8}{k}G(k-2) \right]$$

la transformée de la condition initiale (3.21) en utilisant (3.14)

$$Y(0) = 1 \quad \text{et} \quad Y(1) = 0$$

On utilise la relation (3.16) polynômes d'Adomian pour la fonction non linéaire

$$g(y) = y \ln y.$$

$$G(0) = g(Y(0)) = 1$$

$$G(1) = Y(1)$$

$$G(2) = Y(2) - \frac{1}{2}Y^2(1)$$

$$G(3) = Y(3) - Y(1)Y(2) + \frac{1}{3}Y^3(1)$$

$$G(4) = Y(4) - Y(1)Y(3) - \frac{1}{2}Y^2(2) + Y^2(1)Y(2) - \frac{1}{4}Y^4(1)$$

$$G(5) = Y(5) - Y(2)Y(3) - Y(1)Y(4) + Y^2(1)Y(3) + Y(1)Y^2(2) - Y^3(1)Y(2) + \frac{1}{5}Y^5(1)$$

$$G(6) = Y(5) - \frac{1}{2}Y^2(3) - Y(2)Y(4) - Y(1)Y(5) + \frac{1}{2}Y^2(1)Y^2(2) + \frac{1}{3}Y^3(1)Y(3) - \frac{3}{2}Y^2(1)Y^2(2) - Y^3(1)Y(3) + Y^4(1)Y(2) - \frac{1}{6}Y^6(1)$$

En utilisant la transformée inverse, on obtient la solution approximative

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{120}x^{10} + O(x^{11})$$

x	Abs. rel. err. (5 Termes)	Abs. rel. err. (10 Termes)	Abs. rel. err. (15 Termes)
0.2	$8.25371E - 10$	0	0
0.4	$7.64934E - 07$	$2.83821E - 13$	0
0.6	$3.73777E - 05$	$7.26632E - 12$	0
0.8	$5.27137E - 04$	$1.77822E - 09$	0

Comparaison numérique des résultats dans l'exemple 3.2.4

Exemple 3.2.5 (voir [6])

On considère l'équation intégro-différentielle non linéaire de Fredholm

$$(x^3 + 1)y^{(4)}(x) - \frac{8}{315}y'(x) = \frac{x^2}{8} + \int_0^1 xt(x+t)y^3(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.22)$$

les conditions initiales

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2 \quad \text{et} \quad y^{(3)}(0) = 0 \quad (3.23)$$

les transformées différentielles de (3.23) et les conditions initiales (3.24) sont

$$Y(k+4) = \frac{k!}{(k+4)!} \left[\frac{k!}{(k-3)!}Y(k) + \frac{8(k+1)}{315}Y(k+1) + \left(\frac{1}{8} + \alpha \right) \delta(k-2) + \beta\delta(k-1) \right] \quad (3.24)$$

telle que

$$\alpha = \int_0^1 ty^3(t)dt, \quad \beta = \int_0^1 t^2y^3(t)dt \quad (3.25)$$

et

$$Y(0) = -1, \quad Y(1) = 0, \quad Y(2) = 1, \quad Y(3) = 0, \quad Y(4) = 0$$

substituant $k = 1$ et $k = 2$ dans l'équation (3.24) donc

$$\begin{aligned} Y(5) &= \frac{2}{4725} + \frac{\beta}{120} \\ Y(6) &= \frac{1}{2880} + \frac{\alpha}{360} \end{aligned}$$

La relation suivante est obtenue à partir de l'équation (3.25)

$$Y(k+4) = \frac{k!}{(k+4)!} \left[-\frac{k!}{(k-3)!} Y(k) + \frac{8(k+1)}{315} Y(k+1) \right]_{k \geq 3}$$

Par (3.25), on peut montrer que

$$\alpha = \sum_{k=2}^N \frac{G(k-2)}{k}, \quad \beta = \sum_{k=3}^N \frac{G(k-3)}{k}$$

$$G(0) = Y^2(0) = -1$$

$$G(1) = -3Y(1)$$

$$G(2) = 3Y(2) + Y(1)Y(2) - 3Y^2(1)$$

$$G(3) = 3Y(3) - 6Y(1)Y(2) + Y^3(1)$$

$$G(4) = 3Y(4) - 6Y(1)Y(3) - 3Y^2(2) + 3Y^2(1)Y(2)$$

$$G(5) = 3Y(5) - 6(Y(2)Y(3) + Y(1)Y(4))$$

$$+3(Y^2(1)Y(3) + Y(1)Y^2(2))$$

$$G(6) = 3Y(6) - (3Y^2(3) + 6Y(2)Y(4) + 6Y(1)Y(5)) + Y^3(2)$$

$$+6Y(1)Y(3)Y(3) + 3Y^2(1)Y(4)$$

$$\alpha = -\frac{1}{8}, \quad \beta = -\frac{16}{315}$$

la solution est

$$y(x) = -1 + x^2.$$

Chapitre 4

Résolution numérique des équations intégré- différentielles

Dans ce chapitre on essaye de trouver la solution numérique de certaines classes d'équations intégré- différentielles linéaires et non linéaire on se basant sur la méthode de collocation, utilisant les polynômes de Legendre et les polynômes de Bernstein, où on emploie la matrice opérationnelle d'intégration et de dérivation, les solutions approximatives sont donnée sous forme des polynômes.

L'étude de la convergence de la méthode est nécessaire aussi bien que la vitesse de la convergence, en estimant les erreurs pour ces méthodes avec comparaison des solutions approchées avec la solution exacte.

4.1 Polynômes de Legendre

La formule suivante, dite formule de Rodrigues, donne l'expression de p_n pour tout entier $n \geq 0$ (voir [34]).

Théorème 4.1.1 *Pour tout entier n , p_n est un polynôme unitaire de degré n et on a*

$$p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n), \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Notons que pour tout n , $p_n(1) = 2^n(n!)^2/(2n!)$. Les polynômes de Legendre, que nous désignerons dans la suite par une lettre majuscule P_n , sont proportionnels aux polynômes p_n et normalisés de façon que $P_n(1)$ soit égal à 1. Ils sont donc donnés, grâce à la formule de Rodrigues, par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} p_n(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

Ainsi, le coefficient de x^n dans l'expression de P_n est égal à $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. On a par exemple

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = (1/2)(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = (1/2)(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = (1/8)(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = (1/8)(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = (1/16)(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

Théorème 4.1.2 *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = 2/(2n + 1).$$

Théorème 4.1.3 *La suite des polynômes de Legendre (P_n) est une base orthogonale de l'espace $L^2((-1, 1), dx)$. Toute fonction f de $L^2((-1, 1), dx)$ se développe de façon unique sous la forme*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) P_n \quad \text{avec} \quad c_n(f) = \frac{2n+1}{2} \langle f, P_n \rangle$$

où la convergence de la série a lieu en moyenne quadratique

$$\lim \left\| f - \sum_{n=0}^N c_n(f) P_n \right\|_{L^2} = 0$$

on a de plus l'égalité de Parseval

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n(f)|^2}{2n+1}$$

On notera que le polynôme de Legendre de f , de degré n , donné par

$$L_n f(x) = \sum_{k=0}^n c_k(f) P_k(x)$$

réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de f par des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On notera aussi que si f est paire (resp. impaire), son développement ne fera intervenir que les polynômes de Legendre d'indice pair (resp. impair).

Propriétés des polynômes de Legendre

1- Parité. Pour tout entier naturel n et pour tout x , on a

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad \text{en particulier} \quad P_n(-1) = (-1)^n$$

Ainsi pour n pair, $P_n(x)$ ne contient que des puissances paires de x et pour n impair, $P_n(x)$ ne contient que des puissances impaires de x .

• L'orthogonalité

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) Q_m(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2m+1}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

2- Relation de récurrence

$$\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x) = x P_n(x)$$

Pour démontrer cette relation on remarque que $xP_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ et admet donc un développement sous la forme

$$xP_n(x) = \sum_{j \leq n+1} a_{nj} P_j(x) \quad \text{avec} \quad a_{nj} \|P_j\|^2 = \langle xP_n, P_j \rangle$$

comme $a_{nj} \|P_j\|^2 = a_{jn} \|P_n\|^2$, il en résulte que $a_{nj} = 0$ pour $j < n-1$ (et pour $j > n+1$). En posant $a_{nn+1} = \alpha_n$, $a_{nn} = \beta_n$ et $a_{nn-1} = \gamma_n$, on en déduit que

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x).$$

En examinant la parité des deux membres, on voit que $\beta_n = 0$ et en faisant $x = 1$, il vient $\alpha_n + \gamma_n = 1$. Enfin, en comparant les termes de plus haut degré dans chacun des deux membres, on trouve

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \alpha_n \frac{(2n+2)!}{2^{n+1} ((n+1)!)^2}$$

d'où il résulte que

$$\alpha_n = \frac{n+1}{2n+1} \quad \text{et par suite} \quad \gamma_n = \frac{n}{2n+1}$$

ce qui termine la preuve.

3- Equation différentielle

Pour tout entier naturel n , on a

$$(1-x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) + n(n+1) P_n(x) = 0$$

On peut établir cette équation de la manière suivante; on part de l'égalité

$$\frac{d}{dx} \{ (1-x^2) P_n'(x) \} = (1-x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x)$$

le deuxième membre est un polynôme de degré n , on peut donc le décomposer suivant la base $\{P_i; i \leq n\}$

$$\frac{d}{dx} \{ (1-x^2) P_n'(x) \} = \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i(x) \quad (\star)$$

la propriété d'orthogonalité implique

$$\alpha_i \|P_i\|^2 = \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{d}{dx} \{ (1-x^2) P_n(x) \} dx$$

deux intégrations par parties successives donnent

$$\alpha_i \|P_i\|^2 = \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx} \{ (1-x^2) P_i(x) \} dx$$

Or la dérivée de $(1-x^2) P_i(x)$ est un polynôme de degré i , on en déduit que $\alpha_i = 0$, $\forall i < n$

et la relation (\star) peut maintenant s'écrire

$$(1-x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) = \alpha_n P_n(x).$$

En comparant les coefficients des termes de plus haut degré dans chacun des membres, on trouve immédiatement $\alpha_n = -n(n+1)$. D'où résulte l'équation différentielle cherchée.

4.2 Résolution des équations intégral-différentielles (E.I-Ds) linéaires utilisant les polynômes de Legendre

- Soit le problème (voir [11] et [25])

$$\sum_{k=0}^m F_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda \int_{-1}^1 K(x,t) y(t) dt, \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (4.1)$$

tel que $K(x,t)$ est le noyau de l'intégrale

$g(x), F_k(x), (k = 0, 1, \dots, m)$ sont des fonctions analytiques

λ constant.

Avec conditions mixtes

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{jk} y^{(k)}(-1) + b_{jk} y^{(k)}(+1) + c_{jk} y^{(k)}(0) = U_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (4.2)$$

L'approximation de la solution $y(x)$ par le polynôme de Legendre $P_n(x)$ et

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^N a_n P_n(x), \\ A &= (a_0, a_1, \dots, a_n)^T, \\ P(x) &= (P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)) \end{aligned}$$

par recurrence on a

$$P^{(k)}(x) = P(x) (\Pi^T)^k .A$$

$$y(x) = P(x).A, \quad y^{(k)}(x) = P(x) (\Pi^T)^k .A$$

$$\Pi^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(x) = \sum_{k=0}^m F_k y^{(k)}(x), \quad \lambda I_f(x) = \lambda \int_{-1}^1 K(x, t) y(t) dt$$

- L'écriture matricielle de (4.1) est

$$D = G - \lambda I_f$$

pour les points de collocation $x_i : (i = 0, 1, 2, \dots, N)$

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i$$

on a

$$D = \begin{pmatrix} D(x_0) \\ D(x_1) \\ \vdots \\ D(x_N) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}, \quad \lambda I_f = \begin{pmatrix} \lambda I_f(x_0) \\ \lambda I_f(x_1) \\ \vdots \\ \lambda I_f(x_N) \end{pmatrix}$$

$$D(x_i) = \sum_{k=0}^m F_k(x_i) y^{(k)}(x_i), \quad D = \sum_{k=0}^m F_k P (\Pi^T)^k . A$$

$$\lambda I_f(x) = \int_{-1}^1 P(x) . k_\ell . P^T(t) . P(t) . A dt = P(x) . k_\ell \int_{-1}^1 P^T(t) . P(t) . A dt$$

on a

$$\int_{-1}^1 P^T(t) . P(t) . A dt = Q = [q_{m,n}] = \begin{cases} \frac{1}{2m+1} & ; m = n \\ 0 & ; m \neq n \end{cases}$$

et

$$K(x, t) = P(x) . k_\ell . P^T(t)$$

$$\lambda I_f(x) = P(x) . k_\ell . Q . A$$

l'équation (4.1) devient

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^2 F_k P \left(\Pi^T \right)^k - \lambda K_\ell Q \right\}}_W A = G \quad (4.3)$$

telle que

$$K_\ell = [K_{\ell_{i,j}}]$$

$$K_{\ell_{i,j}} = \frac{\langle L_i(x), \langle K(x, t), L_j(t) \rangle \rangle}{\langle L_i(x), L_i(x) \rangle \cdot \langle L_j(t), L_j(t) \rangle}, \quad i, j = 0, 1, \dots, m,$$

$$P = \begin{pmatrix} P_0(x_0) & P_1(x_0) & P_2(x_0) & \cdots & P_N(x_0) \\ P_0(x_1) & P_1(x_1) & P_2(x_1) & \cdots & P_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_0(x_N) & P_1(x_N) & P_2(x_N) & \cdots & P_N(x_N) \end{pmatrix}$$

pour la condition mixtes (4.2)

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk}P(-1) + b_{jk}P(+1) + c_{jk}P(0)] [\Pi^T]^k A = U_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

$$U_j.A = [U_{ij}]$$

telle que

$$U_j = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk}P(-1) + b_{jk}P(+1) + c_{jk}P(0)] [\Pi^T]^k, \quad A = (U_{j0}, U_{j1}, \dots, U_{jN}).$$

Alors on obtient une matrice \tilde{W} inversible donnée par

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} \omega_{00} & \omega_{0,1} & \cdots & \omega_{0,N} \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \cdots & \omega_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-m,0} & \cdots & \cdots & \omega_{N-m,N} \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m-1,0} & \cdots & \cdots & u_{m-1,N} \end{bmatrix}$$

on trouve que

$$\tilde{W}A = G \quad \text{et} \quad A = (\tilde{W})^{-1} G.$$

on peut donc déterminer les coefficients a_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, N$), et ainsi $\tilde{y}(x)$ solution approximative de l'équation intégro-différentielle (4.1).

Remarque 4.2.1 *si ($\lambda = 0$) on obtient une équation différentielle ordinaire linéaire.*

4.2.1 Estimation d'erreurs

Soit $\delta_n(x)$ la fonction d'erreur qui provient du solution (voir [39])

$$\begin{aligned}\delta_n & : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \delta_n & = \sum_{k=0}^m F_k(x)y^{(k)}(x) - g(x) - \lambda I_f(x), \forall x \in [a, b]\end{aligned}$$

Les erreurs de calcul sont minimales, si $\delta_n(x)$ est équivalente à la fonction nulle sur les noeuds x_0, x_1, \dots, x_N .

$$\delta(x_i) = |D(x_i) - g(x_i) - \lambda I_f(x_i)| \cong 0$$

on définit la solution d'erreurs absolues

$$\delta_n(x) = |\varphi(x) - \varphi_N(x)|$$

pour trouver les erreurs de calcul sur les noeuds de l'intervalle donnée, on écrit

$$\delta_n(x_i) = |\varphi(x_i) - \varphi_n(x_i)|, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

avec $\varphi(x)$: la valeur de solution exacte et $\varphi_N(x)$: est le polynôme de solution approchée.

Exemple 4.2.2 (voir [39])

Soit l'équation intégro-différentielle

$$\begin{cases} y'' + xy' - xy = 3x^2 + 6x + \int_{-1}^1 xy(t)dt \\ y(0) = -1, y'(0) = 3 \end{cases}$$

telle que

$$F_0(x) = -x, \quad F_1(x) = 5, \quad F_2(x) = 1, \quad g(x) = -3x^2 + 6x, \quad \lambda = 1 \quad \text{et} \quad K(x, t) = x$$

l'approximation de solution $y(x)$ par le polynôme de Legendre sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

pour ($N = 3$) les points de collocation sont

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{3}i, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

on obtient

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 F_k P \left(\mathbf{\Pi} \right)^k - \lambda K_t Q \right\} A = G$$

telle que

$$F_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

la matrice obtenue est

$$F_0 P \left(\mathbf{\Pi} \right)^0 + F_1 P \left(\mathbf{\Pi} \right)^1 + F_2 P \left(\mathbf{\Pi} \right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{31}{9} & -\frac{398}{81} \\ -1 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

les matrices K_t et Q sont

$$K_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

K_ℓ est définie par $K_\ell = (Q^{-1})^T K_t Q^{-1}$

$$K_\ell = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, \quad \lambda P K_\ell Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

utilisant la formule

$$F_0 P \left(\begin{matrix} T \\ \Pi \end{matrix} \right)^0 + F_1 P \left(\begin{matrix} T \\ \Pi \end{matrix} \right)^1 + F_2 P \left(\begin{matrix} T \\ \Pi \end{matrix} \right)^2 - \lambda P K_\ell Q = W$$

la matrice W est

$$W = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & -22 \\ 1 & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} \\ -1 & \frac{2}{9} & \frac{31}{9} & -\frac{398}{81} \\ -3 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

la condition $y(0) = -1$ et $y'(0) = 3$ donné

$$U_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 ; -1], \quad U_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 ; 3]$$

$$G = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ g(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -\frac{7}{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

les matrices \tilde{W} et \tilde{G} peuvent s'écrire

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & -22 \\ 1 & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} -9 \\ -\frac{7}{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La matrice A est

$$A = [\tilde{W}]^{-1} G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{188}{1555} & \frac{891}{1555} & -\frac{327}{1555} & \frac{4}{311} \\ -\frac{261}{3110} & \frac{567}{3110} & \frac{108}{1555} & -\frac{27}{311} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -\frac{7}{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pour ($N = 3$) la solution approximative est

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^N a_n P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x) \\ &= (-1) \cdot 1 + 3x + 0 + 0 = -1 + 3x \end{aligned}$$

Exemple 4.2.3 (voir [39])

Soit l'équation intégro-différentielle

$$\begin{cases} y'' + xy' - xy = 8x^2 - \frac{25}{3}x + 7x^3 - 3x^4 + 4 + \int_{-1}^1 xy(t)dt \\ y(0) = 7, y'(0) = -4 \end{cases}$$

telle que

$$(N = 3) F_0(x) = -x, \quad F_1(x) = 5, \quad F_2(x) = 1, \quad g(x) = -3x^2 + 6x, \quad \lambda = 1 \quad \text{et} \quad K(x, t) = x$$

l'approximation de la solution $y(x)$ par le polynôme de Legendre avec ($N = 3$) est

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 a_n P_n(x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

on a ($N = 3$)

$$F_0(x) = -x, \quad F_1(x) = x, \quad F_2(x) = 1, \quad g(x) = 8x^2 - \frac{25}{3}x + 7x^3 - 3x^4 + 4, \quad \lambda = 1 \quad \text{et} \quad K(x, t) = x$$

pour ($N = 3$) les points de collocation sont

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i = -1 + \frac{2}{3}i = -1 + \frac{2}{3}i, \quad i = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 1$$

l'écriture matricielle de l'équation donnée est

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 F_k P \left(\mathbf{\Pi} \right)^k - \lambda K_\ell Q \right\} A = G$$

telle que

$$F_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$K_\ell = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{31}{3} \\ \frac{199}{27} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{23}{3} \end{bmatrix}$$

$$F_0 P \left(\mathbf{\Pi} \right)^0 + F_1 P \left(\mathbf{\Pi} \right)^1 + F_2 P \left(\mathbf{\Pi} \right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{31}{9} & -\frac{398}{81} \\ -1 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

pour les conditions $y(0) = 7, y'(0) = -4$ on obtient les matrices

$$U_0 = \left[1 \ 0 \ -\frac{1}{2} \ 0 \ ; 7 \right] \text{ et } U_1 = \left[0 \ 1 \ 0 \ -\frac{1}{2} \ ; -4 \right]$$

d'où la matrice

$$\left[\tilde{W}; \tilde{G} \right] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & -22 & \vdots & \frac{31}{3} \\ 1 & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} & \vdots & \frac{199}{27} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \vdots & -4 \end{bmatrix}$$

la solution de système algébrique est

$$A = \left[\frac{23}{3} \quad -\frac{11}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{6}{5} \right]^T$$

- $y(x)$ l'approximation de la solution donnée par

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^N a_n P_n(x) = \frac{23}{3} P_0(x) + \left(-\frac{11}{5} \right) P_1(x) + \left(\frac{4}{3} \right) P_2(x) + \left(\frac{6}{5} \right) P_3(x) \\ y(x) &= 3x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \end{aligned}$$

4.3 Polynômes de Bernstein

On utilise les polynômes de Bernstein pour trouver la solution numérique de certaines équations intégro- différentielles en employant la matrice opérationnelle d'intégration et de dérivation où on obtient la solution approximative sous forme d'un polynôme.

Propriétés (voir [28])

La formule générale des polynômes de Bernstein du $n^{\text{ième}}$ degré sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par

$$b_{in}(x) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}, \quad i = 0, \dots, n$$

on obtient $(n+1)$ polynômes satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) $b_{in}(x) = 0$, si $i < 0$ ou $i > n$
- ii) $\sum_{i=0}^n b_{in}(x) = 1, \forall x \in [0, 1], \forall i \in 0, \dots, n$
- iii) $b_{in}(a) = b_{in}(b) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1$

Si $[a, b] = [0, 1]$, alors on obtient

$$b_{in}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad i = 0, \dots, n$$

- Les polynômes de Bernstein de degré n forment une base pour l'espace vectoriel P_n des polynômes de degré $\leq n$.
- Une combinaison linéaire de polynômes de base de Bernstein

$$B(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{in}(x)$$

est appelée un polynôme sous forme de Bernstein de degré n . Les coefficients c_i sont appelés coefficients de Bernstein ou des coefficients de Bézier.

- On a aussi les propriétés supplémentaires suivantes :

1. $b_{in}(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$, (positivité)
2. $b_{in}(x) = b_{n-i,n}(1-x)$, (symétrie)

Lemme 4.3.1 (voir [30]) La dérivée d'ordre $k \geq 1$ du polynôme de Bernstein est donnée par

$$b_{in}^{(k)}(x) = \left(\prod_{s=0}^{s=k-1} (n-s) \right) \left(\sum_{m=0}^{m=k} (-1)^{m+2} \binom{k}{m} b_{i-k+m, n-k}(x) \right), \quad (i \geq k \geq m) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \binom{k}{m} &= \frac{k!}{m!(k-m)!} \\ b_{in}^{(k)}(x) &= 0 \text{ tel que } (n < k) \\ \binom{k}{m} &= \frac{k!}{m!(k-m)!}, \end{aligned}$$

$$b_{i,n}^{(k)}(x) = 0 \quad \text{si } n < k$$

Démonstration. (voir [30]) démonstration par récurrence pour $(k = 1)$, on a

$$\begin{aligned} b_{i,n}(x) &= \left(\prod_{s=0}^{s=0} (n-s) \right) \left(\sum_{m=0}^{m=1} (-1)^{m+2} \binom{1}{m} b(x)_{i-k+m, m-k}(x) \right) \\ b_{i,n}(x) &= n \left(\binom{1}{0} b_{i-1, n-1}(x) - \binom{1}{1} b_{i, n-1}(x) \right) \end{aligned}$$

la relation est vraie pour $k = 1$

On suppose que la relation (4.4) est vraie pour $k \in \mathbb{N}$.

Montrons que la relation est vraie pour $(k + 1)$ on a

$$b_{i,n}^{(k+1)}(x) = \left[b_{i,n}^{(k)}(x) \right]' \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} b_{i,n}^{(k)}(x) &= \left(\prod_{s=0}^{s=k-1} (n-s) \right) (b_{i-k, n-k}(x) - kb_{i-k+1, n-k}(x) + \frac{k(k-1)}{2!} b_{i-k+2, n-k}(x) \\ &\quad + \dots + (-1)^{m+2} b(x)_{i, n-k}(x)) \\ \left[b_{i,n}^{(k)}(x) \right]' &= \left(\prod_{s=0}^{s=k-1} (n-s) \right) (b'_{i-k, n-k}(x) - kb'_{i-k+1, n-k}(x) + \frac{k(k-1)}{2!} b'_{i-k+2, n-k}(x) + \dots \\ &\quad + \dots + (-1)^{m+2} b'(x)_{i, n-k}(x)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

on a les relations suivantes

$$\begin{aligned}
b'_{i-k,n-k}(x) &= (n-k)(b_{i-k-1,n-k}(x) - b_{i-k,n-k-1}(x)) \\
b'_{i-k+1,n-k}(x) &= (n-k) \infty (b_{i-k,n-k-1}(x) - b_{i-k+1,n-k-1}(x)) \\
&\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
b'_{i,n-k}(x) &= (n-k)(b_{i-1,n-k-1}(x) - b_{i,n-k-1}(x))
\end{aligned} \tag{4.7}$$

substituant (4.7) dans (4.8) on obtient

$$\begin{aligned}
[b'_{i,n}(x)]' &= \left(\prod_{s=0}^{s=k-1} (n-s) \right) (n-k) b(x)_{i-(k+1),n-k-1} - (k+1) b(x)_{i-k,n-(k+1)} \\
&\quad + \left(\frac{k(k-1)}{2!} b(x)_{i-(k+1),n-(k+1)} + \dots + ((-1)^{m+2}) b(x)_{i,n-(k+1)} \right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

on a

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{s=0}^{s=k-1} (n-s) \right) (n-k) &= \left(\prod_{s=0}^{s=k} (n-s) \right) \\
1 = \binom{k+1}{0}, (k+1) &= \binom{k+1}{1}, \frac{k(k-1)}{2!} = \binom{k+1}{2}, \dots, 1 = \binom{k+1}{k+1}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

substituant (4.9) dans (4.8) on obtient

$$\begin{aligned}
[b'_{i,n}(x)]' &= \left(\prod_{s=0}^{s=k-1} (n-s) \right) (n-k) (b(x)_{i-(k+1),n-k-1} - (k+1) b(x)_{i-k,n-(k+1)}) \\
&\quad + \frac{k(k-1)}{2!} b(x)_{i-(k+1),n-(k+1)} + \dots + ((-1)^{m+2}) b(x)_{i,n-(k+1)} \\
&= \left(\prod_{s=0}^{s=k} (n-s) \right) \left(\binom{k+1}{0} b(x)_{i-(k+1),n-k-1} - \binom{k+1}{1} b(x)_{i-k,n-(k+1)} \right. \\
&\quad \left. + \binom{k+1}{2} b(x)_{i-(k+1),n-(k+1)} + \dots + ((-1)^{m+2}) \binom{k+1}{k+1} b(x)_{i,n-(k+1)} \right) \\
&= \left(\prod_{s=0}^{s=k} (n-s) \right) \left(\sum_{m=0}^{m=k} (-1)^{m+2} \binom{k+1}{m} b(x)_{i-(k+1)+m,n-(k-1)} \right) = b_{i,n}^{(k+1)}(x)
\end{aligned}$$

et la relation est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. ■

Matrice opérationnelle d'intégration (voir [32])

L'idée dépend de la propriété intégrale suivante du vecteur de base $\varphi(x)$

$$\int_0^x \int_0^{x_n} \int_0^{x_{n-1}} \dots \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} \varphi(x_1) dx_1 \dots dx_n = P_{n+1}^n \varphi(x)$$

où $\varphi(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]^T$ et les éléments : $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ sont des fonctions de base orthogonale sur un certain intervalle $[a, b]$ et P_{n+1} est la matrice opérationnelle par l'intégrale de $\varphi(x)$.

Forme de la matrice opérationnelle d'intégration P_{n+1}

on a

$$\int_a^x b_{in}(t) dt = \varphi_i(x) = \sum_{j=0}^n c_{jn}^i b_{jn}(x) = (c_{0n}^i, c_{1n}^i, \dots, c_{nn}^i) \Phi(x), i = 0, 1, \dots, n.$$

Avec

$$\Phi(x) = (b_{0,n}(x), b_{1,n}(x), \dots, b_{n,n}(x))^T$$

alors on trouve

$$\int_0^t \Phi(x) dx = P_{n+1} \Phi(t)$$

P_{n+1} : la matrice d'ordre $(m+1) \times (m+1)$ donnée par

$$P_{n+1} = \langle c_{jn}^i \rangle_i^n, \quad i, j = 0, \dots, n$$
$$c_{jn}^i = \langle \varphi_i, b_{jn} \rangle = \int_0^1 \left(\int_0^t b_{in}(x) dx \right) b_{jn}(t) dt.$$

La matrice opérationnelle de dérivation (voir [15])

La dérivée de $\phi(x)$ est donnée par

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = D^{(1)}\phi(x)$$

$D^{(1)}$: la matrice opérationnelle de dérivation

$$D^{(n)} = (D^{(1)})^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

on a

$$\phi(x) = A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ \vdots \\ nx^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} (-1)^0 \binom{n}{0} & (-1)^0 \binom{n}{0} \binom{n-0}{1} & \cdots & (-1)^{n-0} \binom{n}{0} \binom{n-0}{n-0} \\ \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & (-1)^0 \binom{n}{i} & \ddots & (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-i} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^0 \binom{n}{i} \end{pmatrix}, \quad \Delta_n(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad \Delta_n^*(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix}$$

on obtient

$$\phi(x) = A.V.\Delta_n^*$$

et

$$\Delta_n^* = B^* \phi(x), \quad B^* = \begin{pmatrix} A_{[1]}^{-1} \\ A_{[2]}^{-1} \\ \vdots \\ A_{[n]}^{-1} \end{pmatrix}$$

donc

$$\phi(x) = A.V.B^* \phi(x)$$

où $D = A.V.B^*$ est la matrice de dérivation.

La matrice opérationnelle duale

On note par H La matrice opérationnelle duale donnée par

$$H = \int_0^1 \phi(x) \cdot \phi^T(x) dx,$$

telle que

$$\int_0^1 b_{km}(x) b_{ij}(x) dx = \frac{\binom{m}{k} \binom{m}{i}}{(m+j+1) \binom{m+j}{k+i}}$$

$$H = \frac{1}{2m+1} \begin{bmatrix} \frac{\binom{m}{0} \binom{m}{0}}{\binom{2m}{0}} & \frac{\binom{m}{0} \binom{m}{1}}{\binom{2m}{1}} & \dots & \frac{\binom{m}{0} \binom{m}{m}}{\binom{2m}{m}} \\ \frac{\binom{m}{0} \binom{m}{0}}{\binom{2m}{1}} & \frac{\binom{m}{0} \binom{m}{0}}{\binom{2m}{2}} & \dots & \frac{\binom{m}{0} \binom{m}{0}}{\binom{2m}{m+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\binom{m}{0} \binom{m}{0}}{\binom{2m}{m}} & \frac{\binom{m}{0} \binom{m}{0}}{\binom{2m}{m+1}} & \dots & \frac{\binom{m}{m} \binom{m}{m}}{\binom{2m}{2m}} \end{bmatrix}$$

4.3.1 Approximation d'une fonction $y(x)$ et $y^p(x), p \geq 1$ par les polynômes de Bernstein

Fonction approximative (voir [29] et [33])

Si la fonction $f \in L^2 [0, 1]$, on a

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_{in} b_{in}(t) \tag{4.10}$$

$c_{in} = \langle f, b_{in} \rangle, \langle, \rangle$ le produit scalaire dans $L^2 [0, 1]$.

pour $(n = m)$, la relation (4.10) est

$$f(x) = \sum_{i=0}^m c_{i,m} b_{i,m}(x) = C^T \phi(x)$$

$$C = [c_{0,m}, c_{1,m}, \dots, c_{m,m}]^T \quad \phi(t) = [b_{0,m}(t), b_{1,m}(t), \dots, b_{m,m}(t)]^T$$

$$y^{(s)}(x) = C^T \Phi(x) = Q_s^T \Phi(x),$$

$$y^{(s-1)}(x) = (b_{s-1} E^T + C^T P_b) \Phi(x) = Q_{s-1}^T \Phi(x),$$

$$y^{(s-2)}(x) = (b_{s-1} E^T + b_{s-1} d_1^T + C^T P_b^2) \Phi(x) = Q_{s-2}^T \Phi(x),$$

$$y'(x) = \left(b_1 E^T + b_2 d_1^T + \frac{b_3}{2!} d_2^T + \dots + \frac{b_{s-1}}{(s-2)!} d_{s-2}^T + C^T P_b^{s-1} \right) \Phi(x) = Q_1^T \Phi(x)$$

$$y(x) = \left(b_0 E^T + b_1 d_1^T + \frac{b_2}{2!} d_2^T + \dots + \frac{b_{s-1}}{(s-1)!} d_{s-1}^T + C^T P_b^s \right) \Phi(x) = Q_0^T \Phi(x)$$

d'autre part, on pose

$$y(x) = Q_0^T \phi(x)$$

calculons : $y^{(2)}(x), y^{(3)}(x), \dots, y^{(\ell)}(x)$

$$y^2(x) = [Q_0^T \phi(x)] [Q_0^T \phi(x)] = [Q_0^T \phi(x) \phi^T(x) Q_0],$$

on a

$$Q_0^T \phi(x) \phi^T(x) = \phi^T(x) \hat{Q}_0$$

alors

$$y^2(x) = \phi^T(x) \cdot \hat{Q}_0 \cdot Q_0 = Q_0^T (\hat{Q}_0)^T \phi(x)$$

$$y^3(x) = y(x) y^2(x) = (Q_0^T \phi(x)) (\phi^T(x) \cdot \hat{Q}_0 \cdot Q_0) (\hat{Q}_0)^2 Q_0$$

et par récurrence on obtient

$$y^p(x) = \phi^T(x) \cdot (\hat{Q}_0)^{p-1} \cdot Q_0 = Q_0^T \left[(\hat{Q}_0)^{p-1} \right]^T \phi(x)$$

4.3.2 Résolution numérique des équations intégral-différentielles linéaires de Fredholm du 1^{er} ordre à condition mixte

Soit l'équation intégral-différentielle linéaire de Fredholm de 1^{er} ordre à condition mixte (voir [30])

$$\begin{cases} Q(x)y'(x) + R(x)y(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)y(t)dt = f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \sum_{s=0}^m e_s y(r_s) = \mu & 0 \leq r_s \leq 1. \end{cases} \quad (4.11)$$

telle que Q, R, f et K sont des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) = C^T \phi(x) \\ C^T &= (c_0, c_1, \dots, c_n), \quad \phi(x) = (b_{0,n}, b_{1,n}, \dots, b_{n,n})^T. \end{aligned}$$

$b_{i,n}(x)$ les polynômes de Bernstein de degré n et $a_i = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ sont les inconnues.

On a

$$y'(x) = \sum_{i=0}^n n a_i (b_{i-1,n-1}(x) - b_{i,n-1}(x)). \quad (4.12)$$

La substitution de (4.12) dans (4.11) donne

$$Q(x) \sum_{i=0}^n n a_i (b_{i-1,n-1}(x) - b_{i,n-1}(x)) + R(x) \sum_{i=0}^n a_i b_{i,n}(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t) \sum_{i=0}^n a_i b_{i,n}(t) dt = f(x), \quad (4.13)$$

après simplification de (4.13), on obtient

$$\begin{aligned} &\left[R(x)b_{0,n}(x) - nQ(x)b_{0,n-1}(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)b_{0,n}(t)dt \right] a_0 \\ &+ \sum_{i=1}^n a_i \left[nQ(x) (b_{i-1,n-1}(x) - b_{i,n-1}(x)) + R(x)b_{i,n}(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)b_{i,n}(t)dt \right] = f(x). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Multiplions (4.14) par $b_{j,n}(x)$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left[R(x)b_{0,n}(x) - nQ(x)b_{0,n-1}(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)b_{0,n}(t)dt \right] a_0 b_{J,n}(x) dx \\
& + \sum_{i=1}^n a_i \int_0^1 \left[nQ(x)(b_{i-1,n-1}(x) - b_{i,n-1}(x)) + R(x)b_{i,n}(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)b_{i,n}(t)dt \right] b_{J,n}(x) dx \\
& = \int_0^1 f(x)b_{J,n}(x) dx, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

on obtient le système linéaire

$$a_0 \alpha_J + \sum_{i=1}^n a_i c_{i,J} = G_J \quad J = 0, 1, \dots, n$$

$$\alpha_J = \int_0^1 \left[R(x)b_{0,n}(x) - nQ(x)b_{0,n-1}(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)b_{0,n}(t)dt \right] b_{J,n}(x) dx, \quad J = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$C_{i,J} = \int_0^1 \left[nQ(x)(b_{i-1,n-1}(x) - b_{i,n-1}(x)) + R(x)b_{i,n}(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)b_{i,n}(t)dt \right] b_{J,n}(x) dx$$

$$G_J = \int_0^1 f(x)b_{J,n}(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad J = 0, 1, \dots, n-1.$$

La condition initiale dans peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{s=0}^m e_s y(r_s) = \sum_{s=0}^m e_s \sum_{i=0}^n a_i b_{i,n}(r_s) \\
&= \sum_{s=0}^m e_s (a_0 b_{0,n}(r_s) + a_1 b_{1,n}(r_s) + \dots + a_n b_{n,n}(r_s)) \\
&= \left(\sum_{s=0}^m e_s b_{0,n}(r_s) \right) a_0 + \left(\sum_{s=0}^m e_s b_{1,n}(r_s) \right) a_1 + \dots + \left(\sum_{s=0}^m e_s b_{n,n}(r_s) \right) a_n.
\end{aligned}$$

on pose

$$w_k = \left(\sum_{s=0}^m e_s b_{k,n}(r_s) \right), \quad k = 0, \dots, n$$

on obtient

$$\mu = w_0 a_0 + w_1 a_1 + \dots + w_n a_n.$$

on obtient le système général

$$\begin{cases} a_0\alpha_J + \sum_{i=1}^n a_i c_{i,J} = G_J & J = 0, 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n a_i \omega_i = \mu \end{cases} \quad (4.16)$$

l'équation algébrique linéaire est

$$\tilde{A}X = \tilde{b}, \quad (4.17)$$

telle que

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & C_{1,0} & \cdots & C_{n,0} \\ \alpha_1 & C_{1,1} & \cdots & C_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & C_{1,n-1} & \cdots & C_{n,n-1} \\ \omega_0 & \omega_1 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{n-1} \\ \mu \end{pmatrix}$$

Le système algébrique correspondant à la solution de l'équation (4.11) avec la condition mixte est sous la forme (4.17).

La solution approximative est

$$\tilde{y} = a_0 b_{0,n}(x) + a_1 b_{1,n}(x) + \dots + a_n b_{n,n}(x).$$

Remarque 4.3.2 L'erreur E est définie par

$$E = (y(x) - \tilde{y}(x))^2.$$

telle que $y(x)$ et $\tilde{y}(x)$ sont la solution exacte et la solution approximative respectivement.

Exemple 4.3.3

On considère l'équation intégrale-différentielle à condition mixte (voir [30])

$$\begin{cases} x^3 y'(x) + e^x y(x) + 2 \int_0^1 e^{2(x+1)t-(x+1)} y(t) dt = g(x) \\ y(0) + y(1) = 3.0860 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.18)$$

$$g(x) = (2x^3 + e^x)e^{2x-1} + \frac{e^{(x+2)} - e^{-(x+2)}}{x+2}.$$

La solution exacte

$$y(x) = e^{2x-1}.$$

alors, on a

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^3, \quad R(x) = e^x, \quad K(x, t) = e^{2(x+1)t-(x+1)}, \quad \lambda = 2 \\ e_0 &= e_1 = 1, \quad r_0 = 0, \quad r_1 = 1, \quad \mu = 3.0860. \end{aligned}$$

on obtient

$$\alpha_J = \int_0^1 \left[e^x b_{0,n}(x) - nx^3 b_{0,n-1}(x) + 2 \int_0^1 e^{2(x+1)t-(x+1)} b_{0,n}(t) dt \right] b_{J,n}(x) dx \quad (4.19)$$

$$C_{i,J} = \int_0^1 \left[nx^3 (b_{i-1,n-1}(x) - b_{i,n-1}(x)) + e^x b_{i,n}(x) + 2 \int_0^1 e^{2(x+1)t-(x+1)} b_{i,n}(t) dt \right] b_{J,n}(x) dx \quad (4.20)$$

$$G_J = \int_0^1 \left((2x^3 + e^x)e^{2x-1} + \frac{e^{(x+2)} - e^{-(x+2)}}{x+2} \right) b_{J,n}(x) dx, \quad J = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (4.21)$$

$$w_k = b_{k,n}(0) + b_{k,n}(1), \quad k = 0, 1, \dots, 4.$$

pour $n = 4$, la matrice \tilde{A} et le vecteur \tilde{b} est

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.1584 & 0.1266 & 0.1235 & 0.1441 & 0.1901 \\ 0.0949 & 0.1350 & 0.1627 & 0.1911 & 0.2346 \\ 0.0560 & 0.1095 & 0.1750 & 0.2428 & 0.3208 \\ 0.0360 & 0.0758 & 0.1470 & 0.2712 & 0.4847 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0.9458 \\ 1.1459 \\ 1.4402 \\ 1.8654 \\ 3.0860 \end{pmatrix}$$

et

$$X = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T .$$

$\det \tilde{A} \neq 0$, l'équation $\tilde{A}X = \tilde{b}$ admet une seule solution

$$X = (0.3743, 0.5165, 0.8987, 1.3507, 2.7118)^T$$

La solution approximative

$$\tilde{y}(x) = a_0 b_{04}(x) + a_1 b_{14}(x) + a_2 b_{24}(x) + a_3 b_{34}(x) + a_4 b_{44}(x)$$

$$\tilde{y}(x) = 1.0093x^4 - 0.6808x^3 + 1.4404x^2 + 0.5684x + 0.3743$$

x	Exact solution	Aproximate solution	Square error $(y(x) - \tilde{y}(x))^2$
0	0.3679	0.3743	0.4096×10^{-4}
0.1	0.4493	0.4451	0.1764×10^{-4}
0.2	0.5488	0.5419	0.4761×10^{-4}
0.3	0.6703	0.6643	0.1101×10^{-4}
0.4	0.8187	0.8145	0.1764×10^{-4}
0.5	1.0000	0.9967	0.1101×10^{-4}
0.6	1.2214	1.2177	0.1369×10^{-4}
0.7	1.4917	1.4869	0.2304×10^{-4}
0.8	1.8221	1.8158	0.3469×10^{-4}
0.9	2.2255	2.2186	0.4761×10^{-4}
1	2.7183	2.7117	0.5476×10^{-4}

Table 01 : solution exacte et solution approximative et le carré de l'erreur pour (n=4)

exact solution ————— approximate solution + + + + +

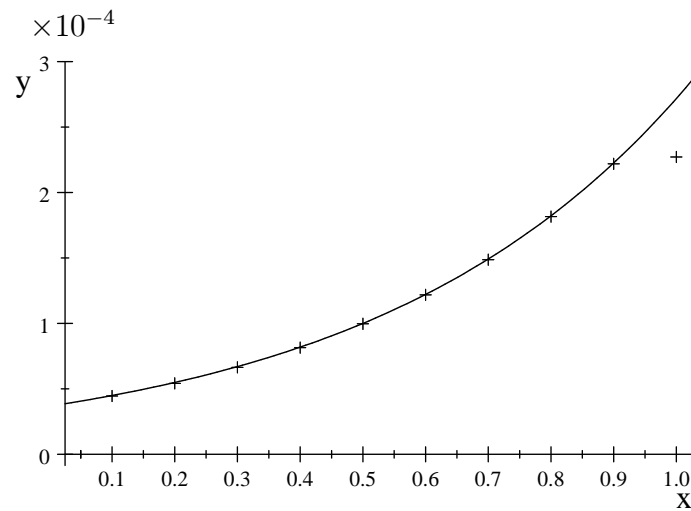


Fig 1. La solution exacte et la solution approximative pour $(n = 4)$

Exemple 4.3.4 (voir [30])

On considère (EDIF) linéaire suivante

$$\begin{cases} (x^2 + 1)y(x) + xy(x) - 2 \int_0^1 e^{x+t}y(t)dt = g(x) \\ \frac{1}{\sqrt{e}}y(\frac{1}{2}) + y(1) = -0.6947 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.22)$$

$$g(x) = \frac{(x^2 + x + 2 - e^2) e^x}{2 - e^2}.$$

La solution exacte de (4.22)

$$y(x) = \frac{e^x}{2 - e^2}.$$

On a

$$Q(x) = x^2 + 1, R(x) = x, K(x, t) = e^{x+t}, \lambda = -2$$

$$\mu = 0.6947, e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, e_1 = 1, r_0 = \frac{1}{2}, r_1 = 1.$$

La solution de (4.22) par la méthode précédente et pour ($n = 5$) donne

$$a_0 = -0.1855765, \quad a_1 = -0.2226918, \quad a_2 = -0.2690726, \quad a_3 = -0.327809, \quad a_4 = -0.4016988, \\ a_5 = -0.4947668$$

La solution approximative est

$$\tilde{y}(x) = a_0 b_{05}(x) + a_1 b_{15}(x) + a_2 b_{25}(x) + a_3 b_{35}(x) + a_4 b_{45}(x) + a_5 b_{55}(x)$$

$$\tilde{y}(x) = -0.00213837x^5 - 0.0065302x^4 - 0.0315287x^3 - 0.0926552x^2 - 0.1855765x - 0.1855765$$

x	Exact solution	Aproximate solution	Square error $(y(x) - \tilde{y}(x))^2$
0	-0.1856	-0.1856	0.0000×10^{-4}
0.1	-0.2051	-0.2051	0.0000×10^{-4}
0.2	-0.2266	-0.2267	0.0001×10^{-4}
0.3	-0.2505	-0.2505	0.0000×10^{-4}
0.4	-0.2768	-0.2768	0.0000×10^{-4}
0.5	-0.3059	-0.3059	0.0000×10^{-4}
0.6	-0.3381	-0.3381	0.0000×10^{-4}
0.7	-0.3737	-0.3736	0.0001×10^{-4}
0.8	-0.4130	-0.4129	0.0001×10^{-4}
0.9	-0.4564	-0.4562	0.0004×10^{-4}
1	-0.5044	-0.5040	0.0016×10^{-4}

Table 2 : solution exacte et solution approximative et le carré del'erreur pour ($n = 5$)

exact solution ————— *approximate solution* + + + +

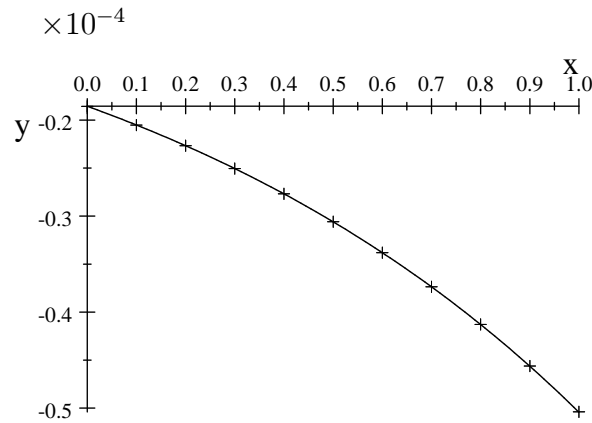


Fig 2. La solution exacte et la solution approximative pour $(n = 5)$

4.3.3 Equations intégro-différentielles linéaires utilisant la matrice op eracionnelle d'intégration et de dérivation.

- Soit l'équation intégro-différentielle de Volterra de la forme

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^s F_j(x)y^{(j)}(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)y^{(\ell)}(t) dt \\ y^{(i)}(x) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (4.23)$$

telle que

- $F_j(x), g(x)$ et $K(x,t)$ sont des fonctions continues.
- $y(x)$ la fonction inconnue.

Le but est de trouver la solution approximative de l'équation (4.23) avec les conditions initiales, utilisant les polynôme de Bernstein.

Relation fondamentale

L'approximation de $y(x)$ par le polynôme de Bernstein est (voir [39])

$$y(x) = \Phi(x).A, \quad X(x) = (1, x, x^2, \dots, x^n) \quad (4.24)$$

telle que

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= (b_{0n}(x), b_{1n}(x), \dots, b_{nn}(x)), A = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T \\ \Phi(x) &= X(x).D^T\end{aligned}\tag{4.25}$$

$$D = [d_{ij}] \text{ et } d_{ij} = \begin{cases} (-1) \binom{N}{i} \binom{N-i}{j-i}; & i \geq j \\ 0; & i < j \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

$$X^{(l)} = (0, 1, 2x, \dots, nx^{n-1})$$

$$X^{(1)}(x) = X(x).B, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

par recurrence on trouve

$$X^{(j)}(x) = X(x).B^j,$$

on obtient

$$y^{(j)}(x) = X(x).B^j.D^T.A, \quad j = 0, 1, \dots, n\tag{4.26}$$

• Substituons (4.26) dans (4.23) on trouve

$$\sum_{j=0}^s P_j(x).X(x).B^j.D^T.A = g(x) + \lambda \int_0^x K(x, t).X(t)dt.B^\ell.D^T.Adt\tag{4.27}$$

on pose

$$V_x = \int_0^x K(x, t).X(t)dt$$

$$V_x = \left(\int_0^x K(x, t) dt, \int_0^x K(x, t) t dt, \dots, \int_0^x K(x, t) t^n dt \right)$$

on obtient

$$\sum_{j=0}^s P_j(x).X(x).B^j.D^T.A = g(x) + \lambda V_x.B^\ell.D^T.A \quad (4.28)$$

En utilisant les points de collocation (x_i) , $i = 0, 1, \dots, N$ dans l'équation (4.28), on obtient

$$\sum_{j=0}^s P_j(x_i).X(x_i).B^j.D^T.A = g(x_i) + \lambda V_{x_i}.B^\ell.D^T.A$$

Alors

$$\left(\sum_{j=0}^s P_j(x_i).X(x_i).B^j.D^T - \lambda V_{x_i}.B^\ell.D^T \right) A = g(x_i) \quad (4.29)$$

l'écriture matricielle de (4.29) est

$$\left(\sum_{j=0}^s P_j.X.B^j.D^T - \lambda V.B^\ell.D^T \right) A = G$$

telle que

$$P_j = \begin{pmatrix} P_j(x_0) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P_j(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & P_j(x_2) & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & P_j(x_n) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_{x_0} \\ V_{x_1} \\ \vdots \\ V_{x_n} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

on pose

$$W = \sum_{j=0}^s P.X.B^j.D^T - \lambda V.B^\ell.D^T$$

on obtient

$$WA = G \quad (4.30)$$

et d'autre part pour la condition initiale

$$\begin{aligned} y^{(i)}(c) &= \alpha_i, \quad 0 \leq c \leq R \\ y^{(i)}(c) &= X(c).B^i.D^T.A = [\alpha_i], \quad i = 0, 1, \dots, (s-1) \end{aligned}$$

où

$$U_i = [\alpha_i]$$

telle que

$$U_i = X(c).B^i.D^T = [U_{i,0}, U_{i,1}, U_{i,2}, \dots, U_{i,N}] \quad (4.31)$$

la relation entre (4.31) et (4.30) donne la nouvelle matrice \tilde{W}

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} \omega_{00} & \omega_{0,1} & \cdots & \omega_{0n} \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n-(s-1),0} & \omega_{n-(s-1),1} & \cdots & \omega_{n-(s-1),n} \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0n} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{s-1,0} & u_{s-1,1} & \cdots & u_{s-1n} \end{bmatrix}$$

on obtient le système matriciel suivant

$$\tilde{W}A = G \quad \text{et} \quad A = (\tilde{W})^{-1} G.$$

Exemple 4.3.5 (voir [39])

Soit équation intégrale-différentielle linéaire de Fredholm

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{7}{6}x + \frac{19}{12} + \int_0^1 (x-t)y(t) dt & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

la solution exacte est

$$y(x) = x^2 + 2$$

$$g(x) = \frac{7}{6}x + \frac{19}{12}, \quad K(x, t) = (x-t), \quad P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = 1, \quad \lambda = 1$$

on a

$$W = P_1.X.B.D^T - V.D^T = (P_1.X.B - V) D^T$$

pour ($n = 2$)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

les points de collocation

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1,$$

$$X = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(\frac{1}{2}) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} \\ \frac{26}{12} \\ \frac{33}{12} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -\frac{23}{12} & \frac{13}{6} & \frac{1}{4} \\ -\frac{13}{12} & 0 & \frac{13}{12} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

En utilisant la condition initiale $y(0) = 0$, on obtient

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} -\frac{23}{12} & \frac{13}{6} & \frac{1}{4} \\ -\frac{13}{12} & 0 & \frac{13}{12} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on a le système algébrique

$$\begin{bmatrix} -\frac{23}{12} & \frac{13}{6} & \frac{1}{4} \\ -\frac{13}{12} & 0 & \frac{13}{12} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} \\ \frac{26}{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

on obtient

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 0.5, \quad a_2 = 2$$

donc

$$\tilde{y}(x) = a_0 b_{02}(x) + a_1 b_{12}(x) + a_2 b_{22}(x)$$

$\tilde{y}(x) = x^2 + x$ solution du problème.

4.3.4 Equations intégro-différentielles non linéaires

Dans cette partie on présente une étude théorique pour la résolution numérique de certains types de (E.I-Ds) non linéaires, utilisant les polynômes de Bernstein, où on a employé la matrice opérationnelle d'intégration et la matrice opérationnelle de dérivation et on donne des exemples illustratifs (voir [?], [5] et [37]).

a) Soit le problème

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^s P_j(x)y^{(j)}(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)y^p(t)dt \\ y^{(k)}(x) = b_k\phi(x), \quad 0 \leq k \leq s-1 \end{cases} \quad (4.32)$$

tel que $K(x,t)$ est le noyau de l'intégrale

$g(x), P_j(x), (j = 0, 1, \dots, s)$ sont des fonctions analytiques

$\lambda, b_k, (k = 0, 1, \dots, s-1)$ sont des constants et $p > 0$.

pour résoudre l'équation (4.32) on a les relations fondamentales suivantes

$$\begin{aligned} y(x) &= Q_0^T \phi(x), & y^p(x) &= \phi^T(x) \left(\hat{Q}_0 \right)^{p-1} Q_0 \\ P^{(j)}(x) &= Q_j^T \phi(x), & H &= \int_0^1 \phi(t)\phi^T(t)dt \\ K(x,t) &= \phi^T(x)K_b\phi(t), & g(x) &= G^T \phi(x) \\ P^T \phi(x)\phi^T(x) &= \phi^T(x)\hat{P} & P_j(x) &= P_j^T \phi(x) \end{aligned}$$

$$K_p = [K_{i,j}]$$

$$K_{i,j} = \frac{\langle \phi_i(x), \langle K(x,s), \phi_j(s) \rangle \rangle}{\langle \phi_i(x), \phi_i(x) \rangle \langle \phi_j(s), \phi_j(s) \rangle}.$$

On remplace dans l'équation (4.32) on obtient (voir [38] et [40])

$$\sum_{j=0}^s P_j^T \phi(x)\phi^T(x)Q_j = G^T \phi(x) + \lambda \int_0^1 \phi^T(x)K_b\phi(t)\phi^T(x) \left(\hat{Q}_0 \right)^{p-1} Q_0 dt$$

Alors

$$\sum_{j=0}^s \phi^T(x)\hat{P}_j Q_j = \phi^T(x)G + \lambda \phi^T(x)K_b H \left(\hat{Q}_0 \right)^{p-1} Q_0 dt$$

Donc on trouve

$$\sum_{j=0}^s \hat{P}_j Q_j = G + \lambda K_b H \left(\hat{Q}_0 \right)^{p-1} Q_0 dt \quad (4.33)$$

d'après (4.33) on obtient un système algébrique non linéaire de $(m+1)$ équations, qui peut être résolu, pour calculer les éléments de Q_0 afin de trouver $y(x)$ (voir [13]).

Exemple 4.3.6 (voir [13])

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xy^2(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.34)$$

$$\rho_0(x) = 0, \quad \rho_1(x) = 1, \quad g(x) = 1 - \frac{1}{3}x, \quad K(x, t) = x, \quad P = 2$$

$$Q_1 - G - K_b H \hat{Q}_0 Q_0 = 0$$

pour $m = 1$

$$\begin{aligned} Q_1 &= C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad K_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ H &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} c_0 - c_1 \\ 7c_0 + 5c_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2c_0 & -(c_0 + c_1) \\ c_0 + c_1 & 6c_0 + 4c_1 \end{bmatrix} \\ &\left\{ \begin{array}{l} c_0 - 1 = 0 \\ c_1 - \frac{2}{3} - \frac{19c_0^2 + 22c_0c_1 + 7c_1^2}{144} = 0 \end{array} \right. \quad (4.35) \end{aligned}$$

la solution de l'équation (4.34) est

$$c_0 = c_1 = 1$$

on a

$$y(x) = Q_0^T \phi(x)$$

on obtient $y(x) = x$ solution de l'équation (4.34)

Exemple 4.3.7 (voir [13])

Soit l'équation intégro-différentielle

$$\begin{cases} xy'(x) - y(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{6} + \int_0^1 (x^2 + t) y^2(t) dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

on a

$$\rho_0(x) = -1, \quad \rho_1(x) = x, \quad g(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{6}, \quad K(x, t) = x^2 + t, \quad P = 2$$

le système algébrique est

$$\hat{P}Q_1 - Q_0 - G - K_b H \hat{Q}_0 Q_0 = 0, \quad (4.37)$$

pour $m = 2$

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{-1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{57}{60} \end{bmatrix}, \quad Q_1 = C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{60}c_0 - \frac{1}{30}c_1 + \frac{1}{60}c_2 \\ \frac{5}{12}c_0 + \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{12}c_2 \\ \frac{19}{60}c_0 + \frac{11}{30}c_1 + \frac{19}{60}c_2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} \\ \frac{19}{30} \end{bmatrix}, \quad K_b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{Q}_0 = \begin{bmatrix} \frac{67}{1050}c_0 - \frac{1}{75}c_1 - \frac{1}{2100}c_2 & -\frac{93}{2100}c_0 - \frac{1}{25}c_1 - \frac{33}{2100}c_2 & -\frac{3}{1050}c_0 + \frac{1}{50}c_1 + \frac{69}{2100}c_2 \\ \frac{57}{420}c_0 + \frac{1}{10}c_1 - \frac{1}{70}c_2 & \frac{31}{105}c_0 + \frac{1}{6}c_1 + \frac{4}{105}c_2 & -\frac{1}{70}c_0 - \frac{1}{10}c_1 - \frac{57}{420}c_2 \\ -\frac{69}{2100}c_0 - \frac{1}{50}c_1 + \frac{3}{1050}c_2 & \frac{33}{2100}c_0 + \frac{1}{25}c_1 + \frac{33}{2100}c_2 & \frac{701}{2100}c_0 + \frac{182}{525}c_1 + \frac{283}{1050}c_2 \end{bmatrix}$$

la solution de l'équation matricielle (4.37) implique que

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 2$$

Alors

$$y(x) = Q_0^T \phi(x)$$

on obtient que $y(x) = x^2$ solution de l'équation donnée.

Exemple 4.3.8 (voir [13])

Soit l'équation intégro- différentielle (E.I-D) non linéaire de Volterra

$$\begin{cases} u''(s) + q(s)u'(s) + r(x)u(x) = \lambda \int_0^x K(x, s) (u(s))^m ds + f(x) \\ u(0) = t_0, \quad u'(0) = t_1 \end{cases} \quad (4.38)$$

l'approximation de $y(x)$ par le polynôme de Bernstein est

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{i=0}^n u_i b_{in}(x) = R^T \phi(x) \\ R^T &= (c_0, c_1, \dots, c_n), \quad \phi(x) = (b_{0n}(x), b_{1n}(x), \dots, b_{nn}(x))^T \end{aligned}$$

D'après (4.38) on a

$$\begin{aligned} (u(s))^m &= \phi^T(s) \cdot (\hat{R})^{m-1} R \\ \lambda \int_0^x K(x, t) (u(s))^m ds &= \lambda \int_0^x \phi^T(x) K_b \phi(s) \phi^T(s) \cdot (\hat{R})^{m-1} R ds \\ &= \lambda \phi^T(x) K_b \int_0^x \phi(s) \phi^T(s) \cdot (\hat{R})^{m-1} R ds \end{aligned}$$

on pose $(\hat{R})^{m-1} R = R_m$

on a $(\phi(x) \phi^T(x))^T = \phi(x) \phi^T(x)$

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^x K(x, s) (u(s))^m ds &= \lambda \phi^T(x) K_b \int_0^x \phi(s) \phi^T(s) \cdot R_m ds \\ &= \lambda \phi^T(x) K_b \int_0^x R_m^T \phi(s) \phi^T(s) ds \\ &= \lambda \phi^T(x) K_b \int_0^x \phi^T(s) \hat{R}_m ds \\ &= \lambda \phi^T(x) K_b (\hat{R}_m)^T \int_0^x \phi^T(s) ds \end{aligned}$$

donc on obtient

$$\lambda \int_0^x K(x, s) (u(s))^m ds = \lambda \phi^T(x) K_b \left(\hat{R}_m \right) P \phi(x)$$

P : la matrice opérationnelle d'intégration

$$u(x) = R^T \phi(x), \quad u'(x) = R^T D \phi(x), \quad u''(x) = R^T D^2 \phi(x)$$

$$u''(s) + q(s)u'(s) + r(x)u(x) = R^T D^2 \phi(x) + q(x)R^T D \phi(x) + r(x)R^T \phi(x)$$

L'écriture matricielle de (4.38) est

$$R^T D^2 \phi(x) + q(x)R^T D \phi(x) + r(x)R^T \phi(x) - \lambda \phi^T(x) K_b \left(\hat{R}_m \right) P \phi(x) = f(x)$$

- les points de collocation x_p , ($p = 1, 2, \dots, n - 1$)

$$x_p = \frac{2p - 1}{2(n - 1)}$$

on trouve le système non linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} R^T D^2 \phi(x_p) + q(x_p)R^T D \phi(x_p) + r(x_p)R^T \phi(x_p) - \lambda \phi^T(x_p) K_b \left(\hat{R}_m \right) P \phi(x_p) = f(x_p) \\ R^T \phi(0) = t_0, \quad R^T D \phi(0) = t_1 \end{array} \right. \quad (4.39)$$

D : la matrice opérationnelle de dérivation.

la solution de système non linéaire (4.39) implique de trouver c_i , ($i = 1, 2, \dots, n$)

d'où la solution approximative

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{in}(x)$$

$$\tilde{u}(x) = c_0 b_{0n}(x) + c_1 b_{1n}(x) + \dots + c_n b_{nn}(x)$$

Exemple 4.3.9 (voir [25])

On considère l'équation intégral-différentielle non linéaire suivante

$$\begin{cases} u''''(x) - xu(x) = \int_0^x x (u(y))^3 dy - x^2 - \frac{1}{4}x^5 \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \end{cases} \quad (4.40)$$

la solution exacte est

$$u(x) = x$$

l'approximation de la solution $u(x)$ par le polynômes de Bernstein est

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{in}(x) = R^T \phi(x)$$

pour $(n = 3)$ on a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, K_\ell = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \phi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} 1 - 3x + 3x^2 + x^3 \\ 3x - 6x^2 + 3x^3 \\ 3x^2 - 3x^3 \\ x^3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{35} & \frac{1}{140} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{35} & \frac{9}{140} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{35} & \frac{9}{140} & \frac{3}{35} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{140} & \frac{1}{35} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} \frac{1}{280} & \frac{263}{840} & \frac{193}{840} & \frac{71}{280} \\ -\frac{3}{280} & \frac{17}{280} & \frac{87}{280} & \frac{67}{280} \\ \frac{3}{280} & -\frac{17}{280} & \frac{53}{280} & \frac{73}{280} \\ -\frac{1}{280} & \frac{17}{840} & -\frac{53}{840} & \frac{69}{280} \end{bmatrix}$$

$$u(0) = R^T \phi(0) = (c_0, c_1, \dots, c_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_0 = 0$$

$$u'(0) = R^T D\phi(0) = (c_0, c_1, \dots, c_n) \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \frac{1}{3}$$

pour les points de collocation x_p , ($p = 1, 2, \dots, n - 1$)

$$x_p = \frac{2p - 1}{2(n - 1)}, \quad p = 1, 2$$

On trouve le système non linéaire suivant

$$R^T D^2\phi(x_p) + q(x_p)R^T D\phi(x_p) + r(x_p)R^T \phi(x_p) - \lambda\phi^T(x_p)K_b(\hat{R}_m)P\phi(x_p) = f(x_p) \quad (4.41)$$

la solution de système non linéaire (4.41) pour $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ implique que $c_1 = 0.7003$, $c_2 = 0.989$ la solution approximative est

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= c_0 b_{03}(x) + c_1 b_{13}(x) + c_2 b_{23}(x) + c_3 b_{33}(x) \\ \tilde{u}(x) &= x + 0.101x^2 - 0.111x^3 \end{aligned}$$

Remarque 4.3.10 Si l'équation est de Fredholm, on a

$$\lambda \int_0^1 K(x, s) (u(s))^m ds = \lambda\phi^T(x)K_b \int_0^1 \phi(s)\phi^T(s).R_m ds$$

on a

$$Q = \int_0^1 \phi(s)\phi^T(s)ds$$

Q : matrice d'ordre $(n + 1) \times (n + 1)$.

Exemple 4.3.11 (voir [40])

On considère l'équation intégro-différentielle (E.I-D) non linéaire de Fredholm

$$\begin{cases} u'(x) = \int_0^1 xy [u(y)]^2 dy \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \end{cases} \quad (4.42)$$

la solution exacte est

$$y(x) = x$$

calculons les matrices suivantes A, Q, D, P, K et $\phi(x)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -12 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{42} & \frac{1}{126} & \frac{1}{630} \\ \frac{1}{18} & \frac{4}{63} & \frac{1}{21} & \frac{8}{315} & \frac{1}{126} \\ \frac{1}{42} & \frac{1}{21} & \frac{2}{35} & \frac{1}{21} & \frac{1}{42} \\ \frac{1}{126} & \frac{8}{315} & \frac{1}{21} & \frac{4}{63} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{630} & \frac{1}{126} & \frac{1}{42} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{1260} & \frac{617}{2520} & \frac{11}{60} & \frac{517}{2520} & \frac{251}{1260} \\ \frac{-1}{315} & \frac{13}{630} & \frac{4}{15} & \frac{113}{630} & \frac{64}{315} \\ \frac{1}{210} & \frac{-13}{420} & \frac{1}{10} & \frac{97}{420} & \frac{41}{210} \\ \frac{-1}{315} & \frac{13}{630} & \frac{-1}{15} & \frac{113}{630} & \frac{64}{314} \\ \frac{1}{1260} & \frac{-13}{2520} & \frac{1}{60} & \frac{-113}{2520} & \frac{251}{1260} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} & \frac{9}{16} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 \\ 4x - 12x^2 + 12x^3 - 4x^4 \\ 6x^2 - 12x^3 + 6x^4 \\ 4x^3 - 4x^4 \\ x^4 \end{bmatrix}, u(x) = R^T \phi(x), R^T = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4)$$

$u(0) = 0$ implique que $(c_0 = 0)$

$u'(0) = 1$ implique que $(c_1 = \frac{1}{4})$

• pour les points de collocation

$$x_p = \frac{2p-1}{2(n-1)}, \quad p = 1, 2, 3$$

$$x_1 = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{5}{6}, \quad x_4 = \frac{7}{6}$$

La solution approximative de (4.42) est

$$u(x) = x - 0.000000001x^2 - 0.000000006x^3 - 0.000000007x^4$$

Conclusion

Dans ce travail nous avons exposé plusieurs résultats pour trouver la solution approchée et la solution numérique de quelques types d'équations intégro- différentielles linéaires et non linéaires, en utilisant les polynômes de Legendre- Bernstein et Adomian.

Cette combinaison nous a permis de construire des méthodes numériques, où on a employé la matrice opérationnelle d'intégration et de dérivation dans un cadre théorique qui nécessite l'existence et l'unicité de la solution.

Notre but revient à trouver la solution approximative de ces équations sous forme de polynômes. La comparaison de toutes ces méthodes de solution utilisées au cours de notre recherche, nous a permis de constater que la méthode d'Adomian est la plus appropriée, à cause surtout de sa précision et de son efficacité rapide et immédiate.

Bibliographie

- [1] G. Adomian, Solving frontier problems of physics : The decomposition method, Kluwer Academic Publishers Boston, MA, 1994.
- [2] Adomian, G. and Rach, R. Analytic Solution of Nonlinear Boundary- Value Problems in Several Dimensions decomposition.(1993).
- [3] Arikoglu, I. Ozkol, Solution of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method, Comput. Math. Appl. 65 (2008) 2411-2417.
- [4] Ayaz, F. Applications of Differential Transform Method to differential-Algebraic Equations. Applied Mathematics and Computation, 152, (2004) 649-657.
- [5] S. Bhattacharyas and B. N. Mandal, Numerical solution of nolinear Integro-differential equations with initial conditions by Bernstien operational matrix of derivative, Applied. Mathematics and computation. C, 195 (1)(2008), 346-350.
- [6] S. H. Behiry, Nonlinear Integro-defferential equations by differentialotransform method with Adomian polynomials, Math. Sci. Lett, 2(3) (2013), 209-221.
- [7] B. Basirat, M. Amin Shadadi, Numerical solution of a singular integro-differential equation, Int. Jou. Mod. N. L. Th. App., (2), (2013), 141-149.
- [8] J. Biazar, M. Eslami, Differential transform method for systems of Volterra integral equations of the second kind and comparison with homotpy perturbation method, Int. J. Phys. Sci. 6 (2011) 1207-1212.

- [9] A. Borhanifar, R. Abazari, Differential transform method for a class of nonlinear integro-differential equations with derivative type kernel, *Canad. J. Comput. Math. Natural Sciences, Eng. and Mid.* 3 (2012) 1-6.
- [10] M. Cakir and D. Arslan, The Adomian decomposition method and the differential transform method for numerical solution of multi-pantograph Delay differential equations, *Appl. Math. Comput.* (6) (2015) 1332-1343.
- [11] R.Y.Chang, M.L.Wang, Shifted Legendre direct method for variational problems, *Journal of optimization theory and Application* 39 (1983) 299-307.
- [12] J. S. Duan, Recurrence triangle for Adomian polynomials, *Appl. Math. Comput.* 216 (2010) 1235-1241.
- [13] G. Ebadi, M. Y. Rahimi-Ardabili, S. Shahmorad, Numerical solution of the nonlinear Volterra integro-differential equations by the Tau method, *Appl. Math. Comput.* 188 (2007) 1580- 1586.
- [14] Evans, D.J. and Raslan, K.R. The adomian Decomposotion Method for solving Delay Differential Equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 82, (2005) 49-54.
- [15] Feng, X. An Analytic Study on the Multi-Pantograph Delay Equations with Variable Coefficients. *Bulletin Mathématique de la society des Sciences mathématiques de Roumanie Tome*, 56, (2013) 205-215.
- [16] W. Glabisz, Direct Walsh-wavelet packet method for variational problems, *Applied Mathematics and Computation* 159 (2004) 769-781.
- [17] B. Golubov, A. Efimov and V. Skvortsov, *Walsh Series and Transforms (Theory and Applications)*, Springer Netherlands, 1991.
- [18] M. Idrees Bhattia and P. Bracken, Solutions of differential equations in a Bernstein polynomial basis, *J. C. A. M comput appl math*, 205 (2007), 272-280.

- [19] Ismail, H.N, Raslan, K.R. and Salem, G.S. Solitary Wave Solutions for the General KdV Equation by Adomian Decomposition Method. *Applied Mathematics and Computation*, 154, (2004) 17-29.
- [20] A. J. Jerri. *Introduction to integral equation with applications*, John Wiley& sons Inc. 1999.
- [21] Hosseini, M.M. and Nasabzadeh, H. On the Convergence of Adomian Decomposition Method. *Applied Mathematics and Computation*, 182, (2006) 536-543.
- [22] V. Lakshmikantham and M. Rama Mohana Rao, *Theory of Integro-differentail Equations*, Gordon and Breach Science Publishers, Volume 1 1995.
- [23] Keskin, Y,at al. Approximate solutions of Generalzed Pantograph Equations by the Differential Transform Method. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical*, 8, (2007) 159-164.
- [24] Kurnaz, A. and Oturanc, G. The Differential Transform Approximation for the System Ordinary Differential Equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 82, (2005) 709-719.
- [25] P. E. Lewis and J. P. Ward, *The finite element method, Principles and Applications*, Addition-Wesley, 1991.
- [26] S. Liao, Notes on the homotopy analysis methjod : Some definitions and theorems, *Commun Nonlinear Sci*, 14 (2009) 983-997.
- [27] K. Maleknejed, Y. Mohmoudi, Taylor Polynomial solution of high-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.* 145 (2003) 641-653.
- [28] K. Maleknejad, E. Hashemizadeh, B. Basirat, Computational Methods based on Bernstein polynomial matrices for nonlinear Voltera-Fredholm-Hammerstein integral equations,*Commun Nonlinear Sci Number Simulat*, 17 (2012) 52-61.

- [29] K. Maleknejed, F. Mirzaee, Numerical solution of integro-differential equations by using rationalized Haar functions method, *Kybernetes Int. J. Syst. Math.* 35 (2006) 1735-1744.
- [30] Miloud Moussai and Lakhdar Chiter, A Computational Method Based on Bernstein Polynomials for Solving Fredholm Integro-Differential Equations under Mixed Conditions, *Journal of Mathematics and Statistics*, 13 (1) (2017), 30-37.
- [31] Mohamed. S. Mohamed, Khalled Geprrel Muteb K.Allrthi and Refah A.Alotabi, Homotopy analysis transform method for intégro-différentials equations, *Gen. Math. Notes*, 32(1) (2016), 32-48.
- [32] K. Parand S. A. Kaviani, Application of the exact operational matrices based on the Bernstein polynomials, *Journal of mathematics and computer science*, 6 (2013), 36-59.
- [33] M. T. Rashed, Numerical solution of functional, integral and integro-differential equations, *Appl. Numer. Math.* 156 (2004).
- [34] M. Razzaghi, S. Yousefi, Legendre wavelets method for nonlinear Volterra-Fredholm integral equations, *Math. Comput. Simul.* 70 (2005) 1-8.
- [35] M. Razzaghi, S. Youcefi, Legendre wavelets direct method for variational problems, *Math and Comput in Simul* 53 (2000) 185-192.
- [36] M. H. Reihani, Z. Abadi, Rationalized Haar functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations, *J. Comput. Appl. Math.* 200 (2007) 12-20.
- [37] A. K. Singh, V. K. Singh, and O. P. Singh, The Bernstein operational matrix of integration, *Applied Mathematical Sciences*, vol.3 (49)(2009), 2427-2436.
- [38] V. K. Singh, R. K. Pandey, O. P. Singh, New stable numerical solutions of singular integral equations of Abel type by using normalized Bernstein polynomials, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 3, no. 5-8, (2009) 257-265.

- [39] S. Yalçınbaş, Mehmet Sezer and Hüseyin Hilmi Sorkun, Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 210 (2009), 334-349. **5.**
- [40] J. Zhao, R.M. Corless, Compact finite difference method for integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.* 177 (2006) 271-288.