

Remerciements

Louange à notre seigneur "ALLAH" qui nous a dotés de la merveilleuse faculté de raisonnement .Louange à notre créateur qui nous incités à acquérir le savoir. C'est à lui que nous adressons toute notre gratitude en premier lieu.

Je tiens à remercier mon promoteur Mr le professeur BLIZAK Tahar pour la confiance qu'il m'a témoigné en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience. Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail.

Finalement, Je remercie mes amies, ma famille pour leur encouragement et leur compréhension, un merci spécial a ma mère pour son intarissable amour, sans toi je ne serais jamais arrivée.

MERCI

Table des matières

Introduction	1
1 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides	3
1.1 Fonction analytique	3
1.2 Equation de Cauchy - Riemann	3
1.3 Fonctions harmoniques	4
1.4 Notions fondamentales	4
1.4.1 L'écoulement est à deux dimensions	5
1.4.2 L'écoulement est stationnaire ou permanent	5
1.4.3 Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel	5
1.4.4 Le fluide est incompressible	6
1.4.5 Le fluide est non visqueux	6
1.5 Le potentiel complexe	6
1.6 Lignes équipotentielles et ligne de courant	8
1.7 Quelques écoulements particuliers	8
1.7.1 Écoulement uniforme	8
1.7.2 Source en $z = a$	9
1.7.3 Puit en $z = a$	10
1.7.4 Tourbillon	10
1.8 Écoulements avec obstacles	11
1.9 Théoreme de Bernoulli	13

2 Transformations conformes	14
2.1 Forme complexe d'une transformation	14
2.2 Transformations conformes	15
2.3 Quelques transformations classiques	16
2.3.1 Transformation linéaire	16
2.3.2 Transformation inverse	16
2.3.3 Transformation linéaire fractionnelle	16
2.4 Représentation sur le Demi -Plan	17
2.5 La transformation de schwarz-christoffel	18
3 Quelques problèmes en mécanique des fluides	21
3.1 Problème de Jet libre	21
3.1.1 Position du problème	22
3.1.2 Méthode de Kirchhoff - Helmholtz	23
3.1.3 Résolution du problème	23
3.2 Écoulement sur une plaque plane verticale avec séparation	29
3.2.1 Position de problème	29
3.2.2 Résolution du problème	30
3.2.3 Calculer la coefficient D	33
conclusion	35
Bibliographie	36

Introduction

En mécanique des fluides, les écoulements à surface libre autour des objets de différentes formes sont étudiés due à leurs importance d'application.

Les problèmes d'écoulements à surfaces libre se trouvent dans beaucoup d'applications de la science. Ils peuvent être définies comme des problèmes dont les formulations mathématiques comportant des surfaces (surfaces libres), qui doivent être trouvées comme faisant partie de la solution. Les premiers travaux sont caractérisés par l'utilisation de la méthode de transformation conforme basée sur la formule de Schwarz-Christoffel, qui peuvent traiter les écoulements qui ont une géométrie polygonale.

Dans notre mémoire, nous restreindrons aux problèmes de la mécanique des fluides. De nombreux résultats ont été obtenus pour le cas des écoulements à surfaces libres, bidimensionnels et stationnaires. Dans le présent travail, on se propose d'étudier un écoulement à surface libre issu d'un orifice et au dessus d'un obstacle. L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables (x, y) de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$.

En négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme d'hodographe du Kirchhoff (1869) ou la transformation Schwarz - Christoffel. Si l'effet des force de gravité ou bien les tensions de surface ne sont pas négligées, le problème ne peut être résolu exactement.

Notre travail est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on présente les notions préliminaires et les définitions générales de la mécanique des fluides.

Dans le chapitre 2, on rappelle en la transformation conforme, et on va expliquer la méthode de transformation de Schwarz-Christoffel.

Dans le chapitre 3, Nous étudions deux problèmes mathématiques, le premier problème est l'écoulement potentiel irrotationnel, d'un fluide incompressible (problème de jet libre) , En utilisant la transformation de Schwarz - Christoffel et théorie des lignes de courant libres (Méthode de Kirchhoff - Helmholtz (1859)) , le 2^{ème} problème est l'écoulement sur une plaque plane verticale avec séparation .

Chapitre 1

Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.1 Fonction analytique

Définition 1.1.1

Soit $f(z)$ est une fonction uniforme dans un ouvert connexe R du plan de la variable complexe z , si la dérivée $f'(z)$ existe en tout point z d'un ouvert connexe R , alors $f(z)$ est dite analytique dans R . Les expressions régulière et holomorphe sont souvent utilisées à la place analytique.

Une fonction $f(z)$ est dite analytique en un point z_0 s'il existe un voisinage $|z - z_0| < \delta$ en tout point duquel $f'(z)$ existe .

1.2 Equation de Cauchy - Riemann

Une condition nécessaire pour que $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ soit analytique dans un ouvert connexe R est que, dans R , u et v vérifient les équations de Cauchy - Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2.1)$$

Si les dérivées partielles qui figurent dans 1.2.1 sont continues dans R , alors les équations de Cauchy - Riemann sont des conditions suffisantes pour que $f(z)$ soit analytique dans R .

les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont souvent appelées fonctions conjuguées, si l'on se donne l'une d'entre elle, on peut déterminer l'autre (à une constante additive près) de telle manière que $u + iv = f(z)$ soit analytique.

1.3 Fonctions harmoniques

Si les dérivées partielles secondes de u et v par rapport à x et à y existent et sont continues dans R , alors on peut tirer de 1.2.1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0 \quad (1.3.1)$$

On déduit de là que, sous ce conditions, Les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique que vérifient l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \psi = 0 \quad \text{où} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = 0 \quad (1.3.2)$$

L'opérateur ∇^2 est souvent appelé le Laplacien.

Des fonction telles que $u(x; y)$ et $v(x; y)$ qui vérifient l'équation de Laplace dans R sont appelée fonctions harmoniques et sont dites harmoniques dans R .

1.4 Notions fondamentales

La solution de nombreux problèmes importants de dynamique des fluides, hydrodynamique ou aérodynamique, est souvent donnée par des méthodes utilisant la variable complexe dans les conditions suivantes :

1.4.1 L'écoulement est à deux dimensions

Les caractéristiques de l'écoulement dans un plan sont les mêmes que dans tout plan parallèle. Ceci permet de ne considérer qu'un plan que nous prendrons pour plan des z . Les figures construites dans ce plan seront considérées comme les sections droites de cylindres infinis à génératrices perpendiculaires au plan considéré.

1.4.2 L'écoulement est stationnaire ou permanent

La vitesse du fluide en tout point (x, y) ne dépend que de la position du point considéré et non du temps.

1.4.3 Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel

Si V_x et V_y désignent les composantes de la vitesse du fluide en (x, y) selon les axes des x et y , il existe une fonction ϕ appelée potentiel des vitesses telle que

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.4.1)$$

De façon équivalente si C est une courbe fermée simple quelconque du plan de la variable z et si V_t désigne la composante tangentielle de la vitesse sur C

$$\oint_C V_t ds = \oint_C (V_x dy - V_y dx) = 0 \quad (1.4.2)$$

L'une ou l'autre des intégrales 1.4.2 est appelée la circulation du fluide le long de C . Quand la circulation est nulle sur toute courbe C , le fluide est dit irrotationnel.

1.4.4 Le fluide est incompressible

La densité ou masse par unité de volume est constante. Si V_n désigne la composante normale du vecteur vitesse sur C cette condition s'écrit sous la forme

$$\oint_c V_n ds = \oint_c V_x dy - V_y dx = 0 \quad (1.4.3)$$

Ou

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (1.4.4)$$

Qui exprime que la quantité de fluide contenue dans C est constante, i.e. la quantité de fluide entrant dans C est égale à la quantité de fluide qui en sort. Pour cette raison l'équation 1.4.3 ou 1.4.4 est appelée équation de continuité.

1.4.5 Le fluide est non visqueux

Ne possède pas de viscosité ou frictions internes. Un fluide visqueux a tendance à adhérer à la surface d'un obstacle placé sur son passage. S'il n'y a pas de viscosité les forces de pression sur la surface lui sont perpendiculaires. Un fluide non visqueux et incompressible est souvent appelé fluide parfait. On doit naturellement se rendre compte qu'un tel fluide n'est qu'un modèle mathématique de fluide réel pour lequel on néglige les phénomènes de viscosité.

1.5 Le potentiel complexe

On voit d'après 1.4.1 et 1.4.4 que le potentiel des vitesses est harmonique, i.e. vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5.1)$$

On en déduit qu'il existe une fonction harmonique conjuguée $\psi(x, y)$ telle que

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (1.5.2)$$

Soit analytique. On a d'après 1.4.1, par dérivation

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_x - iV_y \quad (1.5.3)$$

La vitesse (appelée quelque fois vitesse complexe) est donc donnée par

$$v = V_x - iV_y = \overline{d\Omega/dz} = \overline{\Omega'(z)} \quad (1.5.4)$$

Et a pour module

$$V = |v| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \left| \overline{\Omega'(z)} \right| = |\Omega'(z)| \quad (1.5.5)$$

Les points pour lesquels la vitesse est nulle, i.e. $\Omega'(z) = 0$, sont appelés points d'arrêt, La fonction $\Omega(z)$ dont l'importance est fondamentale dans la caractérisation d'un écoulement est appelée le potentiel complexe.

1.6 Lignes équipotentiels et ligne de courant

Les familles de courbes à un paramètre

$$\phi(x, y) = \alpha, \quad \psi(x, y) = \beta \quad (1.6.1)$$

Où α et β désignent des constantes, sont des familles orthogonales et sont appelées respectivement les lignes équipotentiels et les lignes de courant. Dans le cas d'un écoulement permanent les lignes de courant représentent les trajectoires des particules du fluide.

La fonction ψ est appelée la fonction de courant cependant que comme déjà vu, la fonction ϕ est appelée le potentiel des vitesses.

1.7 Quelques écoulements particuliers

Théoriquement tout potentiel $\Omega(z)$ peut être associé à un écoulement plan particulier. Les exemples qui suivent sont des cas simples qui se présentent dans la pratique. [On remarquera que l'on peut ajouter une constante à tous les potentiels considérés sans affecter la forme de l'écoulement].

1.7.1 Écoulement uniforme

Le potentiel complexe correspondant à l'écoulement d'un fluide à vitesse constante V_0 , dans une direction faisant un angle δ avec direction positive de l'axe des x , est Figure 1.1

$$\Omega(z) = V_0 e^{-i\delta} z \quad (1.7.1)$$

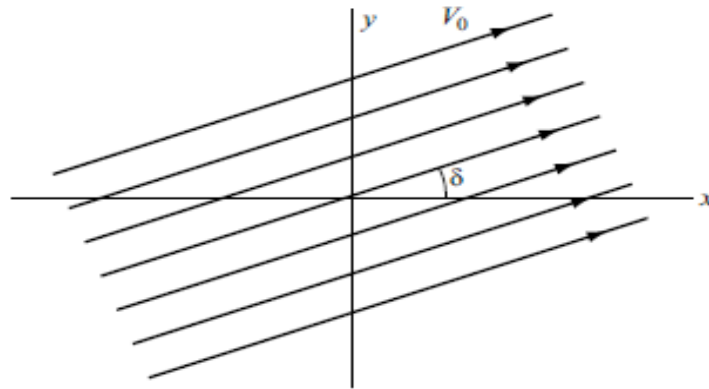


Figure1.1

1.7.2 Source en $z = a$

Si un fluide sort à vitesse constante d'une source en $z = a$ (Figure1.2 ci -dessous) , le potentiel complexe est

$$\Omega(z) = K \log(z - a) \quad (1.7.2)$$

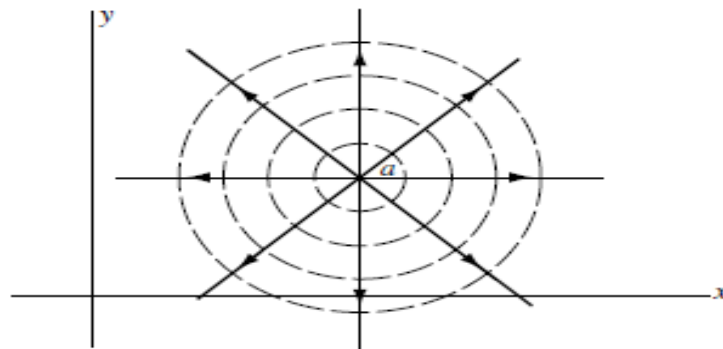


Figure1.2

Où $K > 0$ est appelé la force de la source. Les lignes de courant ont été représentées en traits pleins et les équipotentielle en pointillés.

1.7.3 Puit en $z = a$

Dans ce cas le fluide disparaît en $z = a$ (Figure 1.3 ci-dessous) et le potentiel complexe se déduit de celui d'une source en remplaçant K par $-K$. Ce qui donne

$$\Omega(z) = -K \log(z - a) \quad (1.7.3)$$

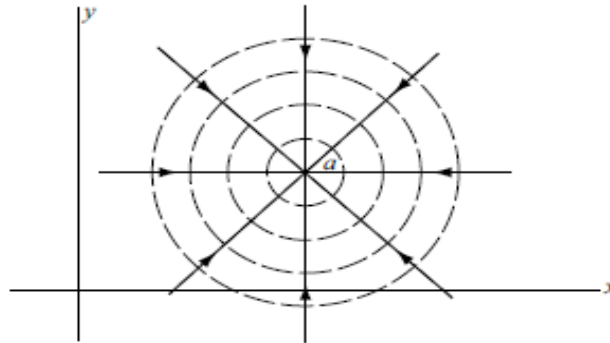


Figure 1.3

1.7.4 Tourbillon

L'écoulement correspondant au potentiel complexe

$$\Omega(z) = -iK \log(z - a) \quad (1.7.4)$$

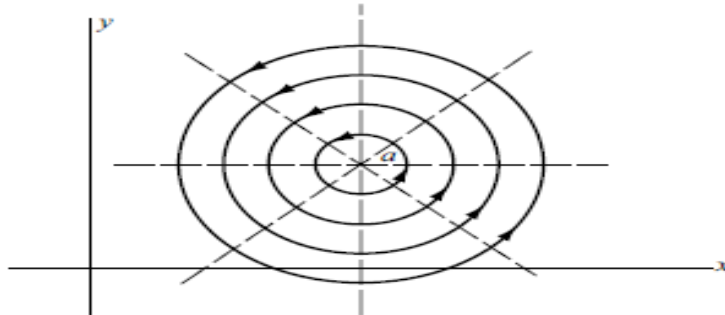


Figure 1.4

Est représenté dans (Figure 1.4 ci-dessus). La vitesse du fluide est dans ce cas inversement proportionnelle à la distance du point considéré à a .

Le point $z = a$ est appelé un tourbillon et K est sa force. La circulation [voir équation 1.4.2] le long d'une courbe fermée simple C entourant $z = a$ est égale à $2K\pi$ en module. On remarque que si l'on change K en $-K$ on obtient le potentiel complexe correspondant à un tourbillon rétrograde.

1.8 Écoulements avec obstacles

Un important problème dans la théorie de l'écoulement des fluides consiste en la détermination de la forme de l'écoulement d'un fluide se déplaçant initialement à vitesse constante V_0 et dans lequel on a placé un obstacle.

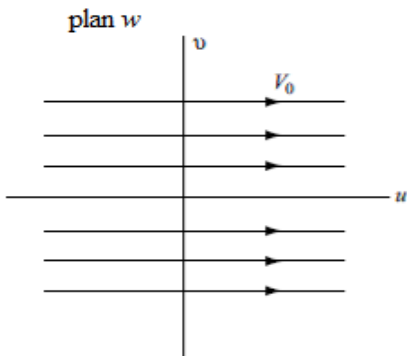


Figure 1.5

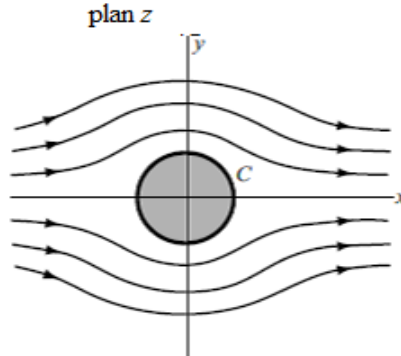


Figure 1.6

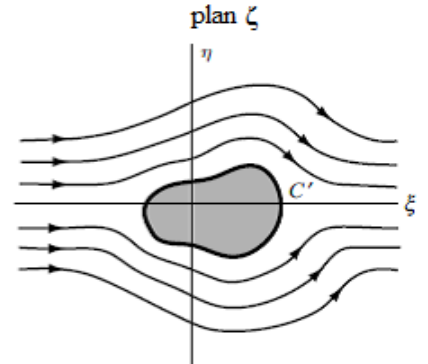


Figure 1.7

On cherche en général dans ce type de problème un potentiel complexe de la forme

$$\Omega(z) = V_0 z + G(z)$$

(si l'écoulement a lieu dans le plan des z) où $G(z)$ est tel que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} G'(z) = 0$, ce qui signifie physiquement que suffisamment loin de l'obstacle la vitesse est constante (dans ce cas V_0). De plus le potentiel complexe devra être choisi de telle façon qu'une ligne de courant représente la frontière de l'obstacle.

Une connaissance de transformations conformes est souvent utile pour obtenir des potentiels complexes. Par exemple le potentiel complexe correspondant à un écoulement uniforme dans le plan des w de la Figure 1.5 est donné par $V_0 w$. Par la transformation $w = z + a^2/z$ la moitié supérieure du plan des w de la Figure 1.5 est transformée en la région de la moitié supérieure du plan des z extérieure au cercle C , et le potentiel complexe pour l'écoulement de la Figure 1.6 est

$$\Omega(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (1.8.1)$$

De même si $w = F(\zeta)$ applique C et son extérieur sur C' et son extérieur [voir Figure 1.7], alors le potentiel complexe pour l'écoulement de la Figure 1.7 est obtenu en remplaçant z par $F(\zeta)$ dans 1.8.1. Le potentiel complexe peut également être obtenu par passage directe du plan des w au plan des ζ au moyen d'une transformation conforme convenable.

A l'aide des considérations précédentes et en introduisant d'autres phénomènes physiques tels que des tourbillons on est en mesure de décrire l'écoulement d'un fluide le long de profils divers et ainsi de décrire le mouvement d'un avion en vol .

1.9 Théoreme de Bernoulli

Si P désigne la pression et V la vitesse d'un fluide le théorème de Bernoulli établie que

$$P + \frac{1}{2}\sigma V^2 = K \quad (1.9.1)$$

Où σ désigne la densité du fluide et K une constante le long de toute ligne de courant

Chapitre 2

Transformations conformes

2.1 Forme complexe d'une transformation

Si $w = u + iv$ (où u et v sont réels) est une fonction analytique de $z = x + iy$ (où x et y sont réels) nous pouvons écrire $u + iv = f(x + iy)$. En égalant les parties imaginaires et les parties réelles ceci est équivalent

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (2.1.1)$$

Dans un tel cas le jacobien de la transformation est

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2 \quad (2.1.2)$$

Ainsi étant donné un point (x, y) dans le plan de la variable z , tel que P dans la Figure 2.1 ci-après, il lui correspond un point (u, v) noté P' , du plan de la variable w (Figure 2.2). L'ensemble des équation [ou ce qui est équivalent, $w = f(z)$] est appelé une transformation. Nous dirons que le point P est transformé en P' par cette transformation et nous appellerons P' l'image de P .

Si $w = z^2$, alors $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$ et la transformation est définie par $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. L'image du point $(1, 2)$ du plan de la variable z est le point $(-3, 4)$ du plan de variable w .

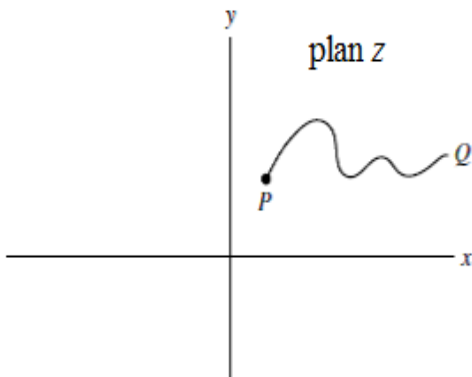


Figure 2.1

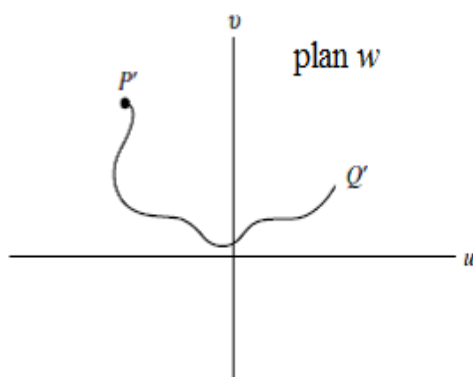


Figure 2.2

2.2 Transformations conformes

Supposons que le point (x_0, y_0) du plan des xy soit transformé en le point (u_0, v_0) du plan des uv [Figure 2.3 et Figure 2.4] cependant que les courbes C_1 et C_2 [se coupant en (x_0, y_0)] sont respectivement transformées en C'_1 et C'_2 [se coupant en (u_0, v_0)]. Une transformation telle que l'angle entre C_1 et C_2 en (x_0, y_0) est égale en grandeur et sens, à l'angle entre C'_1 et C'_2 en (u_0, v_0) , est dite conforme en (x_0, y_0) . Une transformation qui conserve les angles en grandeur mais pas nécessairement en sens, est dite isogonale.

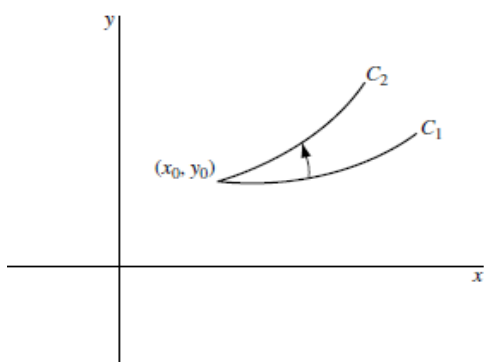


Figure2.3

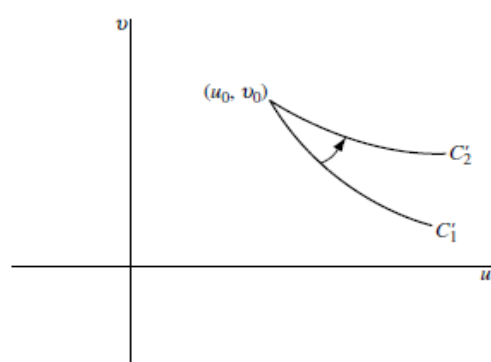


Figure2.4

Si $f(z)$ est analytique et si $f'(z) \neq 0$ en tous les points d'un ouvert connexe R , la transformation $w = f(z)$ est conforme en tous points de R .

2.3 Quelques transformations classiques

2.3.1 Transformation linéaire

Une transformation linéaire $w = Az$, avec $A = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ est une double transformation : expansion/contraction liée au coefficient a et rotation d'un angle α .

2.3.2 Transformation inverse

Une transformation inverse $w = z^{-1}$ pour z non nul transforme les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

2.3.3 Transformation linéaire fractionnelle

La transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

avec a, b, c, d des complexes, transforme les cercles en droites et réciproquement.

2.4 Representation sur le Demi -Plan

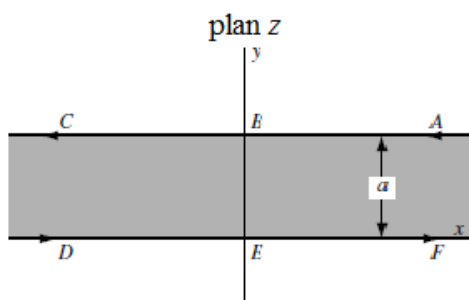


Figure 2.5

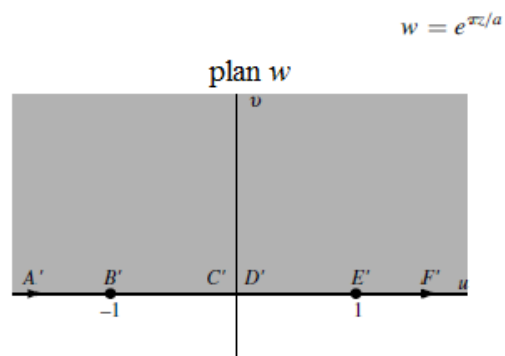


Figure 2.6

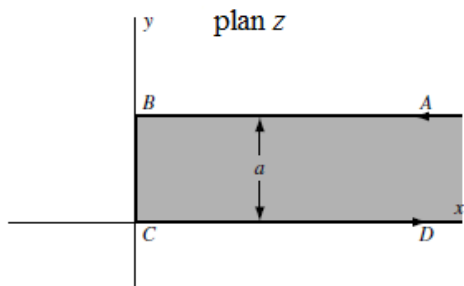


Figure 2.7

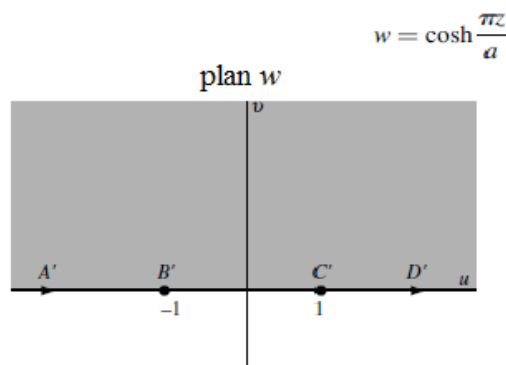


Figure 2.8

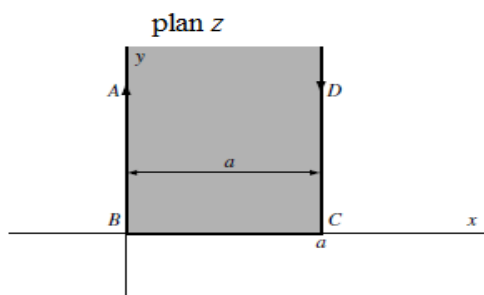


Figure 2.9

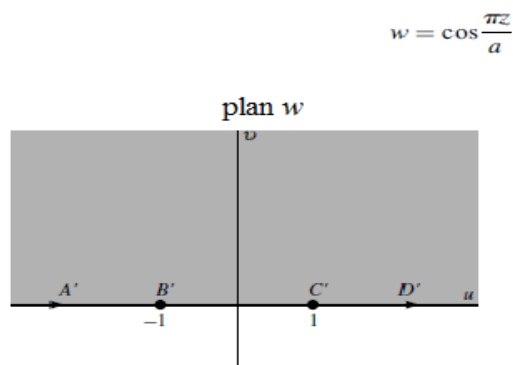


Figure 2.10

2.5 La transformation de schwarz-christoffel

Considérons un polygone [Figure 2.11] dans le plan des w , ayant pour sommets w_1, w_2, \dots, w_n et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soit w_1, w_2, \dots, w_n les points correspondant respectivement x_1, x_2, \dots, x_n de l'axe réel du plan des z [Figure 2.12]

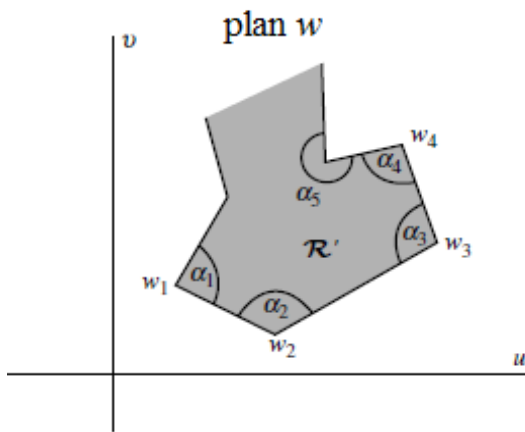


Figure 2.11

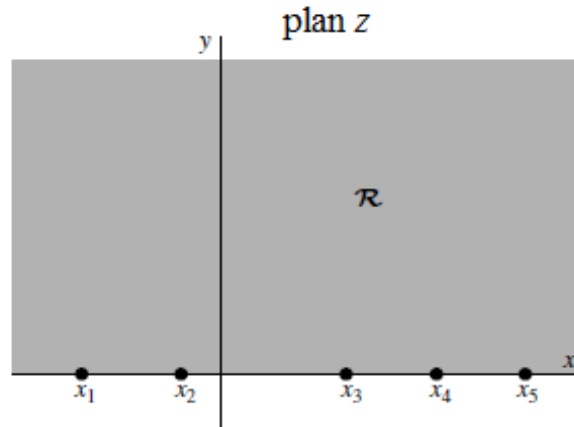


Figure 2.12

Une transformation qui représente l'intérieur R du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des z , et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donnée par

$$\frac{dw}{dz} = (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1} (z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \dots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1} \quad (2.5.1)$$

Où

$$w = A \int (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1} (z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \dots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1} dz + B \quad (2.5.2)$$

Où A et B sont des constantes complexes.

On notera que

1. parmi les point x_1, x_2, \dots, x_n on peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple x_n à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de 2.5.1 et 2.5.2 n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones fermés.

Exemple 2.5.1 Transformation d'une tranche de fluide

Considérons une tranche de fluide entre deux plans horizontaux. Les points A, B, C sont en $+\infty, 0$, et $-\infty$ et définissent un polygone dégénéré. Dans la transformation de Schwarz-Christoffel, tous les points se retrouvent sur le même axe ($y = 0$) comme le montre Dans le plan image, A est situé $-\infty, B'$ en b, C en $c > b$, et D en $+\infty$. Les angles dans le plan w entre les noeuds du polygone sont : $\alpha_B = \pi/2, \alpha_C = \pi/2$, d'où l'on tire : $p_B = -1/2$ et $p_C = -1/2$

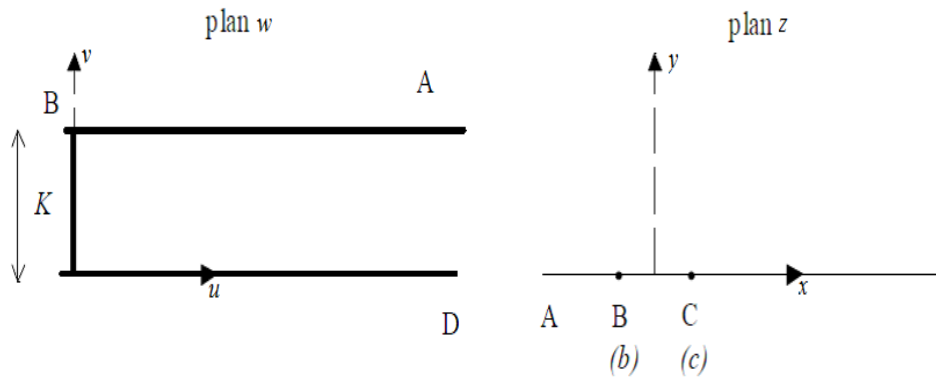


Figure 2.13: passage du plan w au plan z

L'équation de Schwarz-Christoffel donne :

$$\frac{dw}{dz} = K(z - b)^{-\frac{1}{2}}(z - c)^{-\frac{1}{2}} = \frac{K}{z},$$

D'où l'on tire que

$$w(z) = 2K \ln(\sqrt{z-b} + \sqrt{z-c}) + w_0.$$

On peut inverser cette équation et obtenir ainsi :

$$z = \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(b-c) \cosh(K(w-w_0)).$$

Les paramètres b et c peuvent être choisis librement, mais pas K et w_0 qui doivent être choisis de telle sorte que les points images soient bien les images souhaitées par la transformation $z(w)$

Chapitre 3

Quelques problèmes en mécanique des fluides

3.1 Problème de Jet libre

Nous nous intéressons à des écoulements potentiels irrotationnels . De l'équation de continuité $\nabla u = 0$, on tire que quel que soit l'écoulement d'un fluide incompressible , il existe toujours une fonction dite fonction de courant qui vérifie :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Avec $u = (u, v)$ dans un repère cartésien $x-y$. Si de plus l'écoulement est irrotationnel, alors sa vorticité est nulle : $\nabla \times u = 0$ et donc il existe une fonction dite potentiel de vitesse telle que : $u = -\nabla \phi$ Nous nous plaçons aussi en régime permanent de telle sorte que le théorème de Bernoulli soit vérifié le long des lignes de courant $\psi = cte$. On a négligé en première approximation l'effet du champ de pesanteur.

On peut définir un potentiel complexe : $w = \phi + i\psi$. La dérivée de ce potentiel par rapport à $z = x + iy$ fournit la vitesse complexe :

$$\frac{dw}{dz} = u - iv$$

3.1.1 Position du problème

On suppose un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, à surface libre issu d'un orifice de largeur $2d$, où l'effet de gravité et tension de surface sont négligés.

Notons que lorsque $x \rightarrow -\infty$ la vitesse est constante on note par U et pour x positive l'écoulement est limité supérieurement par la surface libre BC (telle que $\psi = \psi_1$) inférieurement par la surface libre $B'C'$ (telle que $\psi = -\psi_1$). Nous supposons que l'écoulement à l'infini ($x \rightarrow +\infty$) est uniforme et de vitesse U et déviation b .

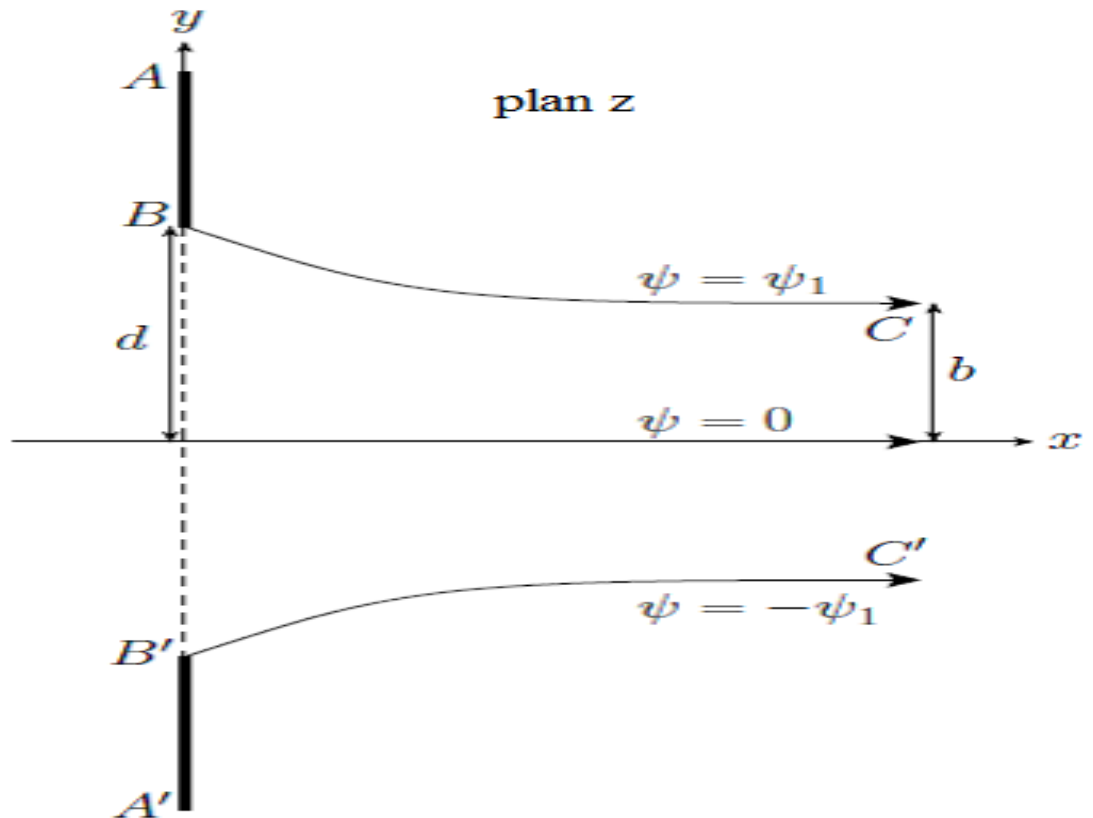


Figure 3.1 : jet libre.

3.1.2 Méthode de Kirchhoff - Helmholtz

En suivant la méthode de Kirchhoff - Helmholtz (1869), on introduit la variable complexe:

$$\Omega = \ln\left(\frac{U}{\frac{dw}{dz}}\right) = \ln\left(\frac{U}{u - iv}\right) = \ln\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta, \quad (3.1.1)$$

Où $u = qe^{i\theta}$ avec $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ et on a $z = x + iy$, $w = \phi + i\psi$, $\frac{dw}{dz} = u - iv$, avec (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse, θ est l'angle que forme le vecteur vitesse avec l'horizontale.

On remarque que la fonction Ω possède de simples propriétés suivantes :

Pour une surface libre, la pression est constante et égale à la pression atmosphérique, donc la vitesse est aussi constante puisque la surface libre correspond en régime permanent à une ligne de courant, donc $q = cte$, donc $\Re(\Omega) = cte$; la surface libre est représentée par un segment droit dans le plan Ω ;

Pour une paroi solide, la composante normale est nulle et la vitesse est parallèle à la surface libre, donc l'angle θ est également constant, donc $\Im(\Omega) = cte$; la paroi est représentée par un segment horizontal dans le plan Ω .

Dans le cas d'un jet, les contours sont des lignes de courant. On peut à la fois caractériser le champ cinématique et le champ potentiel, c'est ce que résumé la Figure 3.2. L'idée essentielle de la méthode de Kirchhoff-Helmholtz est la suivante : on caractérise chacun des champs dans son espace :

- le champ cinématique dans un espace w
- le champ potentiel dans un espace Ω .

3.1.3 Résolution du problème

On utilise une transformation de Schwarz-Christoffel pour transformer chacun des polygones à un même polygone d'un nouvel espace que l'on va appeler ici λ . Il reste donc à déterminer les changements de variable $\lambda(\Omega)$ et $\lambda(w)$ à effectuer. Une fois que cela est fait, on cherche la relation qui existe entre Ω et w ; on s'attend à trouver une équation différentielle que l'on va résoudre.

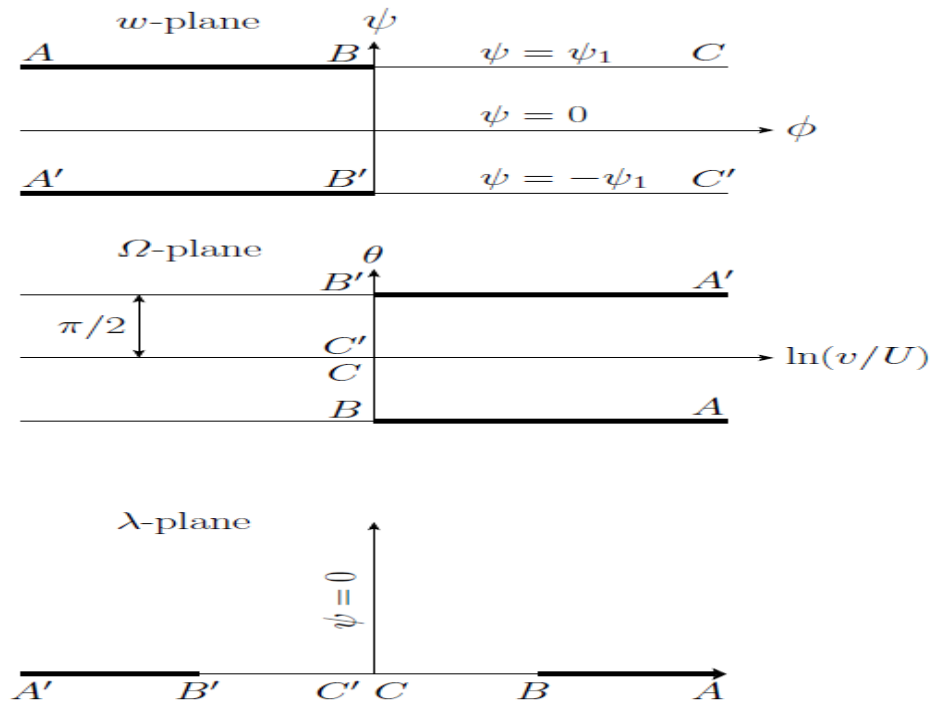


Figure 3.2 : transformation conforme

- 1) Transformation $\lambda(\Omega)$

On choisit $B' = -1, B = 1, C = 0, A$ à l'infini sur le plan λ voir la Figure 3.2 .

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\lambda} &= K(\lambda + 1)^{\frac{\pi}{2}-1}(\lambda - 1)^{-\frac{\pi}{2}-1}(\lambda - 0)^{\frac{\pi}{2}-1} \\ &= K(\lambda + 1)^{-\frac{1}{2}}(\lambda - 1)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Par intégration on trouve :

$$\Omega(\lambda) = k \int (\lambda + 1)^{-\frac{1}{2}}(\lambda - 1)^{-\frac{3}{2}} d\lambda + \Omega_0$$

Et en utiliser le changement de variable sur $\Omega(\lambda)$, d'où on trouve : $K = 1$ et $\Omega_0 = -i\pi/2$

Alors ,on aura :

$$\lambda(\Omega) = \cosh\left[\left(\Omega + i\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

• **2) Transformation $\lambda(w)$**

On choisit $B' = -1, B = 1, C = 0, A$ à l'infini sur le plan λ voir la Figure3.2 .

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\lambda} &= K(\lambda + 1)^{\frac{\pi}{\pi}-1}(\lambda - 1)^{\frac{\pi}{\pi}-1}(\lambda - 0)^{0-1} \\ &= K(\lambda)^{-1} \end{aligned}$$

Par intégration on trouve :

$$w = K \int \frac{1}{\lambda} d\lambda + w_0$$

Ce qui donne , après intégration :

$$w(\lambda) = k \ln \lambda + w_0$$

Pour déterminer les constantes K et w_0 , on utilise les conditions:

1. Pour $\lambda = 1$ alors $w(1) = w_0 = i\psi_1$ puisque $B(w = i\psi_1) \rightarrow B(\lambda = +1)$, en substitue w_0 dans la relation de $w(\lambda)$

On trouve :

$$w(\lambda) = K \ln \lambda + i\psi_1$$

Et on trouve $K = \frac{-2\psi_1}{\pi}$

Alors, en substituant K et w_0 on aura :

$$w(\lambda) = \frac{-2\psi_1}{\pi} \ln \lambda + i\psi_1$$

Ou bien encore

$$\lambda(w) = \exp\left[(w - i\psi_1) \frac{-\pi}{2\psi_1}\right]$$

• **3) Relation $\Omega(w)$ et $w(z)$**

En égalant les deux expressions de λ , on tire :

$$\lambda = i \exp\left[-\frac{\pi}{2\psi_1} w\right] = i \sinh \Omega \quad (3.1.2)$$

On a $\Omega = \ln\left(\frac{U}{\frac{dw}{dz}}\right)$ et en utilisant la définition du sinh Nous trouvons :

$$\begin{aligned} i \sinh \Omega &= \frac{i}{2} \left(\exp\left(\ln\left(\frac{U}{\frac{dw}{dz}}\right)\right) - \exp\left(-\ln\left(\frac{U}{\frac{dw}{dz}}\right)\right) \right) \\ &= \frac{i}{2} \left(\frac{U}{\frac{dw}{dz}} - \frac{\frac{dw}{dz}}{U} \right) \\ \lambda &= \frac{i}{2} \left(U \frac{dz}{dw} - \frac{1}{U} \frac{dw}{dz} \right) \end{aligned}$$

Alors $\lambda = \frac{i}{2}(Uz' - (Uz')^{-1})$ et pour résoudre cette équation on pose $Uz' = X$:

$$\lambda = \frac{i}{2}(X - X^{-1})$$

$$X^2 - \frac{2\lambda}{i}X - 1 = 0$$

Dont la solution s'écrit :

$$X = U \frac{dz}{dw} = -i\lambda \pm \sqrt{1 - \lambda^2},$$

Dont seule la branche avec + est physiquement possible. En se servant de la relation

$$d\lambda = -\frac{i}{2} \frac{\pi}{\psi_1} \lambda dw,$$

Et

$$U \frac{dz}{dw} = -i\lambda + \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad (3.1.3)$$

Par integration l'équation 3.1.3 on trouve que:

$$\frac{U}{2} \frac{\pi}{\psi_1} (z - z_0) = i(\lambda - 1) - \sqrt{1 - \lambda^2} + \tanh^{-1} \sqrt{1 - \lambda^2},$$

Avec z_0 une constante.

Dans le plan complexe z , le point B a pour coordonnées $z = id$ et le point image est le point $\lambda = 1$, d'où $z_0 = id$.

$$\begin{aligned} \frac{U}{2} \frac{\pi}{\psi_1} (z - id) &= i(\lambda - 1) - \sqrt{1 - \lambda^2} + \tanh^{-1} \sqrt{1 - \lambda^2} \\ \frac{U}{2} \frac{\pi}{\psi_1} z &= i(\lambda - 1) - \sqrt{1 - \lambda^2} + \tanh^{-1} \sqrt{1 - \lambda^2} + i \frac{U}{2} \frac{\pi}{\psi_1} d \\ z &= \frac{1}{\frac{U}{2} \frac{\pi}{\psi_1}} [i(\lambda - 1) + \frac{U}{2} \frac{\pi}{\psi_1} d - \sqrt{1 - \lambda^2} + \tanh^{-1} \sqrt{1 - \lambda^2}] \end{aligned}$$

Alors Nous trouvons que

$$z = -\frac{2\psi_1}{U\pi}(\sqrt{1-\lambda^2} - \tanh^{-1} \sqrt{1-\lambda^2}) + i\left(\frac{2\psi_1}{U\pi}(\lambda - 1) + d\right)$$

Où d est la constante d'intégration.

En comparant l'équation 3.1.2 avec ce résultat, on détermine les relation z et w après substitution de $\lambda = i \sinh \Omega = -\sin \theta$ avec $\Omega = i\theta$ dans BC

Donc la forme de surface libre est donnée par :

$$\begin{cases} x = \frac{2\psi_1}{U\pi}[\tanh^{-1}(\cos \theta) - \cos \theta], \\ y = d - \frac{2\psi_1}{U\pi}(\sin \theta + 1) \end{cases}$$

3.2 Écoulement sur une plaque plane verticale avec séparation

3.2.1 Position de problème

Soit BB' une plaque plane verticale, dans un écoulement de fluide incompressible de vitesse à l'infini U . Dans la description du sillage de Helmholtz on suppose que l'écoulement décolle aux extrémités B et B' de la plaque, provoquant ainsi la présence en aval de celle-ci, d'une zone de fluide au repos dont on peut montrer qu'elle s'étend nécessairement jusqu'à l'infini. Le problème qui se pose est de trouver l'écoulement potentiel en dehors de ce sillage et de déterminer, en particulier, la forme des lignes de jet issues des points B et B' . L'allure de l'écoulement, les axes OXY et les principales notations utilisées sont précisés sur la figure.

La zone d'eau morte située derrière la plaque est à pression constante puisqu'il n'y a pas de mouvement ; de plus, cette pression est nécessairement P puisque la zone d'eau morte s'étend jusqu'à l'infini. L'application de la loi de Bernoulli montre alors que la vitesse de l'écoulement potentiel extérieur sur les lignes de jet BC et $B'C'$ est constante et égale U en module.

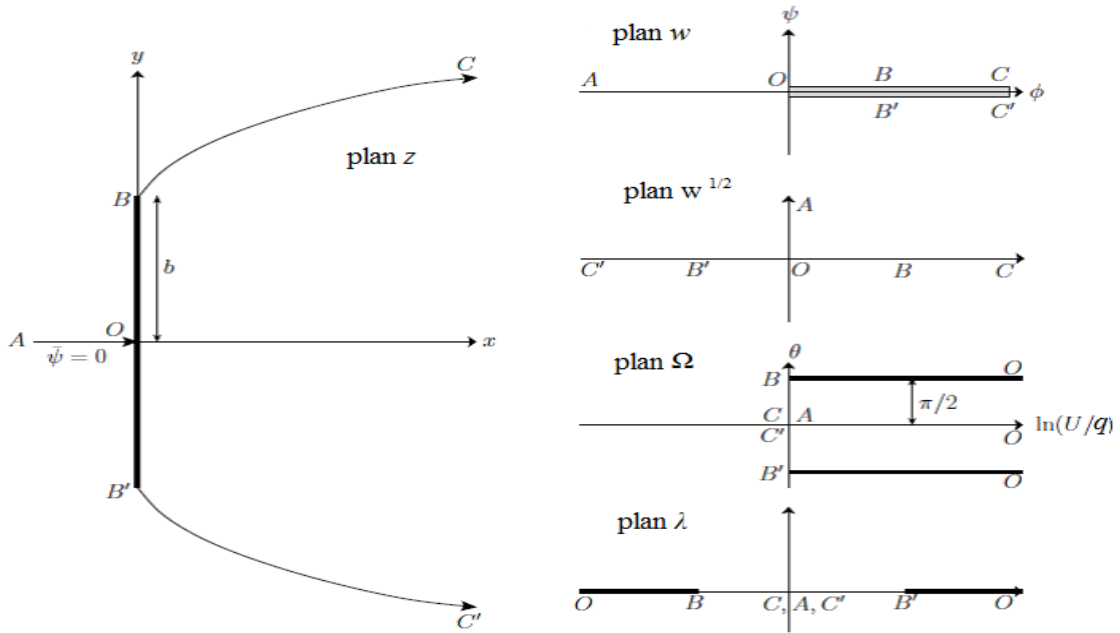


Figure3.3.(a)

Figure3.3.(b)

3.2.2 Résolution du problème

Dans les deux plans Ω et w par coïncidence sur la moitié supérieure de la plan λ . La bande de semi-infini dans plan w a la même largeur, la position et l'orientation que celle représentée sur la Figure3.1. Ainsi, la relation appropriée entre les Ω et λ est à nouveau

$$\lambda = i \sinh \Omega.$$

Avec les emplacements des points B et B' être à nouveau $\lambda = -1$ et $\lambda = +1$ respectivement. la relation appropriée entre w et λ peut être reconnu en notant, d'abord que le flux occupe la moitié supérieure de la Plan $w^{1/2}$, et deuxièmement une inversion et changement de signe sont nécessaires pour amener les points correspondants sur les deux axes réels en coïncidence. Ainsi, on obtient

$$\lambda = -\left(\frac{kU}{w}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Où k est une constante positive.

La relation nécessaire entre w et Ω est donnée par

$$\lambda = -\left(\frac{kU}{w}\right)^{\frac{1}{2}} = i \sinh \Omega$$

Comme:

$$\lambda = i \sinh \Omega = \frac{i}{2}(\exp(\Omega) - \exp(-\Omega)) \quad (3.2.1)$$

On substitue 3.1.1 dans 3.2.1, on trouve :

$$\lambda = \frac{i}{2}\left(\frac{U dz}{dw} - \frac{1}{U} \frac{dw}{dz}\right). \quad (3.2.2)$$

On pose $Y = \frac{1}{U} \frac{dw}{dz}$, l'équation 3.2.2 devient

$$Y^2 - \frac{2}{i}\left(\frac{kU}{w}\right)^{\frac{1}{2}}Y - 1 = 0$$

Dont la solution s'écrit :

$$Y = \frac{1}{U} \frac{dw}{dz} = -i\left(\frac{kU}{w}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{kU}{w}\right)^{\frac{1}{2}},$$

Où la branche $d\left(1 - \frac{kU}{w}\right)^{\frac{1}{2}}$ est celui qui est positif sur AO .

Par intégration, et en suppose $\frac{kU}{w} = \frac{1}{u} \longrightarrow dw = (kU)du$, on trouve :

$$\frac{z}{k} = \int_0^{\frac{w}{kU}} \frac{du}{-iu^{-\frac{1}{2}} + (1 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\frac{w}{kU}} iu^{-\frac{1}{2}} + (1 - \frac{1}{u})^{\frac{1}{2}} du,$$

Ce qui donné, après intégration :

$$\frac{z}{k} = (\frac{kU}{w})^{\frac{1}{2}} (\frac{kU}{w} - 1)^{\frac{1}{2}} - \ln[(\frac{kU}{w})^{\frac{1}{2}} (\frac{kU}{w} - 1)^{\frac{1}{2}}] + 2i(\frac{kU}{w})^{\frac{1}{2}} + i\frac{\pi}{2}.$$

Nous pouvons maintenant évaluer l'utilisation k de fabrication constante du fait que, au point B , où $\lambda = -1$,

$$z = ib, \quad \frac{w}{kU} = 1.$$

Ici, b est la demi-largeur de la plaque. Ainsi, nous obtenons

$$k = \frac{2b}{\pi + 4}.$$

Sur la ligne rationaliser BC ,

$$w = \phi = U(k + s), \quad \Omega = i\theta$$

Où s représente la distance le long de la ligne de courant mesurée à partir de B . Ainsi, sur cette rationaliser

$$\lambda = -\sin \theta = -(\frac{k}{k+s})^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, selon l'équation de la ligne de courant BC peut être écrite, sous forme paramétrique comme :

$$\begin{cases} x = (k+s)^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}} - k \ln\left[\left(1 + \frac{s}{k}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \\ y = 2(k+s)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2}k, \end{cases}$$

Par symétrie, l'équation de la ligne de courant libre $B' C'$ est obtenu à partir de la précédente par l'intermédiaire de l'équation de la transformation $x \rightarrow x, y \rightarrow -y$. On en déduit que la cavité, en aval de la plaque se prolonge à l'infini, et que ses asymptotes aux limites de la parabole

$$y^2 = 4kx = \left(\frac{8b}{\pi + 4}\right)x.$$

3.2.3 Calculer la coefficient D

Du théorème de Bernoulli, la force net exercée par unité de longueur exercée par le fluide sur la plaque, ce qui est évidemment la normale à la plaque et par conséquent, dirigé parallèlement à l'axe x est

$$\begin{aligned} D &= \int_{-b}^b (p - p_0)_{x=0} dy = \int_{-b}^b \left(\frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho v^2\right) dy \\ &= \rho U^2 b - \rho \int_0^{kU} \frac{\partial \phi}{\partial y} d\phi. \end{aligned}$$

Dans le langage classique, cette force constitue un frein, car il est dirigé parallèlement à l'écoulement non perturbé. Maintenant, $\frac{w}{(kU)} = \frac{\phi}{(kU)} < 1$ sur OB

$$\frac{1}{U} \frac{dw}{dz} = -i\gamma^{-\frac{1}{2}} + i\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)^{\frac{1}{2}},$$

Où $\gamma = \frac{\phi}{(kU)}$. Toutefois, $\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = -i\frac{\partial \phi}{\partial y}$. Par conséquent

$$D = \rho U^2 b - \rho U^2 k \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right] d\gamma,$$

Ce qui donne

$$D = \left(\frac{2\pi}{\pi + 4} \right) \rho U^2 b.$$

Enfin, si l'on définit le coefficient de traînée, de la manière habituelle, on obtient alors

$$C_D = \frac{f}{\rho U^2 b} = \frac{2\pi}{\pi + 4} = 0.88.$$

Conclusion

La théorie du surface libre associé le théorème de Schwarz-Christoffel est une technique de pouvoir résoudre analytiquement l'écoulement de fluide idéal avec séparation . Applications de base sont l'écoulement à travers un orifice et l'écoulement sur une plaque plane. Il faut toutefois souligner qu'il s'agit d'une technique de difficile impliquant plusieurs transformations successive. Dans la région de sillage, la vitesse est supposée nulle. Alors que le rapprochement peut convenir lorsque la suite contient un liquide de densité moindre que l'écoulement principal , on obtient souvent plus faible traînée force estimations. Autres effets gravitationnels ont été ignorés dans les développements ci-dessus.

Bibliographie

- [1] A.Laiadi. Effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles, Thèse de Magister, Université de Ouargla, 2012.
- [2] M. Damou. Mécanique des fluides, (O.P.U), septembre 1993.
- [3] J. Gosse, Mécanique des fluides (53-64), 1976.
- [4] A. Quarteroni. Lignes de courant de fluides incompressibles, 2007-2008.
- [5] R. Spiegel and Murray, Theory and Problems of Complex Variables, New York, 1973.
- [6] C. Ancey, Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides (14-26), (L.H.E) CH-1015 Lausanne.
- [7] A. Gasmi. Écoulement potentiel et bidimensionnel issu d'un orifice d'un réservoir, Thèse de Magister, 1997.
- [8] C. Grossetête, Mécanique des fluides, Ellipses, Paris, 1991.