UNIVERSITE DE M’SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L’INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D’ETUDE

Présenté pour l’obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Fondamentales et Appliquées

Par

BOUDJEMAA FAIROUZ

Sujet

Sur Une Classe De Problème Inverse

Dirigé par :

Dr. Memou Ameur

Promotion: 2011/2012

Remerciements

Je remercie tous les enseignants du département de mathématique pour leur aide précieux, et un remerciement spécial pour mon encadreur ***Dr. Memou Ameur*** *pour ses conseil et son suivi durant toute la réalisation de ce mémoire et surtout Pr. Mostefa Nadir et Mr. Latrach Faiz*

Mr. Gagui bachir et Pr. Moussai Madani et Dr. Saadi Khalil.

Chez touts les personnes qui fiaient et aident moi pour faire ce travail particulièrement mes parents.

Table des matières

0.1 Introduction

Le mathématicien français Jacques Salomon Hadamard identifié trois caractéristiques de ce qu'il appelé un problème bien posé :

1) *Existence* : Le probème admet une solution pour toute donnée.

2) *Unicité* : La solution du probème est unique.

3) *Stabilité* : La solution dépend continûment des données.

IL ya des problèmes importants qui ne parviennent pas à avoir certaines ou toutes les propriétés qui définissent un problème bien posé, il sont appelés problèmes mal posés. Beaucoup, mais pas tous, sont concernés par les questions de la forme "Quelle est la cause de cet effet ? puisque, dans de nombreux cas, chaque problème dans cette sous-classe peut être associée à un problème direct" quel est l'effet de cette cause ? il sont appelé prolèmes inverses. Il convient de noter qu'un problème est appelé un problème inverse seulement à cause de sa relation à l'autre que nous appelons direct, dans certains cas, le choix de ce qui à appeler directement et qui appeler inverse est aussi arbitraire, et non pas tous les problèmes inverses sont des problèmes mal posés, et vice varsa.

Nous allons étudier dans ce mémoire les problèmes inverses qui ont beaucoup d'utilisation en sciences physiques et mécaniques.

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre on donne un rappel sur les opérateurs bornés et l'adjoint d'un opérateur et les opérateurs compacts, puis les opérateurs inversibles ; et la décomposition orthogonal d'un espace de Hilbert.

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie spectrale des opérateurs linéaires, en particulier la résolvante d'un opérateur linéaire A, on le note $R(\lambda; A)$, l'objectif de la théorie spectrale est l'étude des propriétés de la résolvante $R(\lambda; A)$, et le spectre d'un opérateur linéaire.

Nous étudierons dans le troisième chapitre les propriétés principales des problèmes inverses, en particulière l'equation opératorielle et quelque méthodes de Rigularisation.

L'objectif de ce mémoire est la résolution de l'équation $Ax = y$ *où* $y \in H_2$, ce problème est mal posé, si : A n'est pas injectif, ou A n'est pas surjectif ou la solution ne dépend pas continûment des données. Puis, on étudier des méthodes de régularisation pour les problèmes inverses, il s'agit de remplacer le problème mal posé par un autre problème bien posé, et évalué la solution par un erreur dans les donnée pour le gain de stabilité, et régularisation conduire à une perte de précision de la solution, nous verrons aussi que la principe de cette méthode est la détermination du paramètre de régularisation.

Chapitre 1

Rappels Et Notions Fondamentales

1.1 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 1 *Soient X, Y deux espaces vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et A un opérateur de X dans Y. On dit que A est un opérateur linéaire si*

$$A(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda A\varphi + \mu A\psi \text{ pour } \lambda, \mu \text{ scalaires et } \varphi, \psi \text{ dans } X.$$

Définition 2 *Soit E un espace vectoriel normé, A un opérateur lénaire de E dans lui- même, on appelle domaine de A, et on le désigne par $D(A)$, le sous espace vectoriel des éléments x de E tel que $A(x)$ ait un sens. On note $R(A)$ le sous espace vectoriel $A(D(A))$.*

Définition 3 ***(opérateurs bornés)*** *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $c > 0$ telque :*

$$\| A(x) \|_F \leq c \| x \|_E , \forall x \in E.$$

Définition 4 ***(opérateurs continus)*** *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit continu si pour toute suite (x_n) de E converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire :*

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(x_0) = A(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Remarque 1 *Un opérateur linéaire A est continu si et seulement s'il est borné.*

Définition 5 ***(opérateurs fermés)*** *On dit que l'opérateur A est fermé si toute suite x_n d'élément de $D(A)$ converge vers x telle que la suite $A(x_n)$ converge vers y alors on a :*

$$x \in D(A) \text{ et } y = A(x).$$

Remarque 2 *Un opérateur fermé A n'est pas nécessairement borné.*

1.2 Prolongement d'un opérateur linéaires borné

Théorème 1 *Soit X un espace normé, $G \subset X$ (G sous espace dense dans X), Y un espace de Banach et A un opérateur linéaire borné de G dans Y, alors il existe un opérateur linéaire borné et unique qu'on le note par B qui prolonge A de G à X, et*

$$\|A\| = \|B\|\,;\ i.e\ A = B\ sur\ G$$

(A est la restriction de B sur G).

1.3 Les opérateurs linéaires compacts

Définition 6 ***(Opérateurs compacts)*** *Un opérateur linéaire $A : X \to Y$ d'un espace normé X dans un espace normé Y est dit compact s'il transforme tout sous ensemble borné de X en un ensemble relativement compact de Y.*

Théorème 2 *Un opérateur linéaire $A : X \to Y$ est compact si et seulement si, pour toute suite bornée (x_n) de X, on peut extraire de la suite (Ax_n) de Y une sous-suite convergente.*

Théorème 3 *Tout opérateur compact est continu.*

Théorème 4 *Une combinaison linéaire de deux opérateurs compacts A_1 et A_2 est un opérateur compact.*

Théorème 5 *Soit Y un espace de Banach, Limite en norme d'une suite d'opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Théorème 6 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des deux opérateurs A ou B est compact.*

Théorème 7 *Soit A un opérateur borné de X dans Y, si $A(X)$ est de dimension finie alors A est compact.*

Théorème 8 *L'opérateur identité I de X dans lui-même est compact si et seulement si X est de dimension finie.*

1.4 L'inversibilité d'un opérateur borné

Définition 7 *Soient X, Y deux espaces normés et A un opérateur linéaire de X dans Y, on dit que A est inversible s'il existe un opérateur linéaire noté A^{-1} de Y dans X tel que*

$$AA^{-1} = I_Y \text{ et } A^{-1}A = I_X.$$

Théorème 9 *L'opérateur A^{-1} est un opérateur linéaire continu si et seulement si*

$$\|Ax\| \geq c\,\|x\|\,, x \in D(A)\,, c > 0.$$

Remarque 3 *L'inverse d'un opérateur linéaire borné n'est pas nécessairement borné.*

Théorème 10 ***(Théorème de l'application ouverte)*** *Soient X, Y deux espaces de Banach et A un opérateur linéaire borné défini de X dans Y, alors A est un ouvert. C-à-d ; l'image $A(U) \subset Y$ est un ouvert dans Y pour tout ensemble ouvert $U \subset X$.*
En particulier ; si A est un isomorphisme borné de X dans Y alors l'inverse $A^{-1} : Y \to X$ est borné. (isomorphisme : est une application linéaire bijective).

Théorème 11 *Si l'opérateur compact A admet un inverse borné alors X est de dimension fini.*

Corollaire 1 *Soit X et Y deux espaces linéraires Normés et X de dimension infini, l'opérateur linéaire compact de X sur Y ne peut pas avoir un inverse borné.*

Corollaire 2 *Si X et Y deux espaces de Banach et X de dimension infini**,** il n'existe pas un opérateur linéaire compact bijective de X dans Y.*

Remarque 4 *Cela signifie que si X et Y sont deux espaces de Banach , X est de dimension* *infini et A un opérateur linéaire compact injective de X dans Y alors $R(A)$ ne peut pas être Y ; en effet ne peut pas être fermé.*

Exemple 1 *On applique ces résultats sur l'opérateur de Fredholm*

$$Af(s) \equiv \int_0^1 K(s,t) f(t)\, dt = g(s), \;\; s \in [0,1]$$

est un opérateur linéaire compact d'un espace de Banach de dimension infini $L^2[0,1]$ dans l'espace de Banach $L^2[0,1]$. D'aprés le corollaire (2), si A est injective c-à-d , il n'existe pas une fonction (différent de zéro) $f(s) \in L^2[0,1]$ telque

$$\int_0^1 K(t,s) f(s)\, ds = 0,$$

alors $R(A)$ ne peut pas être $L^2[0,1]$. Autrement dit la solution de $Af(s) = g(s)$, existe et n'est pas unique $\forall g(t) \in L^2[0,1]$.

1.5 Orthogonalité et décomposition orthogonal d'un espace de Hilbert

Définition 8 ***(orthogonal d'un ensemble)*** *Soit M un sous ensemble non vide de H, on appelle orthogonale de l'ensemble M noté $M^{\perp}$ l'ensemble :*

$$M^{\perp} = \{x \in H, \langle x, y\rangle = 0\, ;\, \forall y \in M\}.$$

Théorème 12 *Soit X un espace Normé $x \in X$ et X_0 un sous espace de dimension fini, alors il existe un èlèment $y_0 \in X_0$ telque :*

$$\|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\|, y \in X_0\}.$$

Corollaire 3 *Soit H_1 un sous espace fermé d'un espace de Hilbert H, et soit $x \in H$ alors il* *existe un et un seule* $y_0 \in H_1$ *telque :*

$$x - y_0 \perp H_1; \langle x - y_0, y \rangle = 0; \forall y \in H_1.$$

et

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y\|\,; \forall y \in H_1.$$

Cet élément est appelé la projection orthogonal de x *sur* H_1 *et l'on noté*

$$y_0 = Px.$$

Théorème 13 (Décomposition orthogonal) *Si* H_1 *un sous espace fermé d'un espace de Hilbert* H *alors tout* $x \in H$ *se décompose d'une manière unique*

$$x = y + z \text{ où } y \in H_1,\ z \in H_1^{\perp}$$

Corollaire 4 *Soit* H_1 *un sous espace fermé d'un espace de Hilbert* H *donc*

$$\begin{cases} H_1 \cap H_1^{\perp} = \{0_H\} \\ H = H_1 \oplus H_1^{\perp} \end{cases}$$

Définition 9 (***système orthonormal***) *l'ensemble* $\{x_k : k = 1, 2, ...\}$ *d'un espace de Hilbert* H*,est dit un système orthonormal si*

$$\begin{cases} \langle x_k, x_j \rangle = 0 & \forall k \neq j, \\ \|x_k\| = 1 & \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1.6 Converge forte et faible dans un espace de Hilbert

Définition 10 *Une suite $(x_n)_{n\in N}$ de H converge faiblement vers $x \in H$ si pour tout $y \in H$, on a*

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \text{ pour } n \to \infty.$$

Définition 11 *Une suite $(x_n)_{n\in N}$ de H converge fortement (convergence en norme) vers $x \in H$, si*

$$\|x_n - x\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty.$$

où $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme de H.

Corollaire 5 *Toute suite $(x_n)_{n\in N}$ converge fortement, converge faiblement.*

Définition 12 *Une fonctionelle $F(x)$ dans un espace de Hilbert H est dite faiblement continue si*

$$\{x_n\} \in H \text{ et } x_n \rightharpoonup x_0, \text{ alors } F(x_n) \to F(x_0).$$

Corollaire 6 *Une fonctionelle faiblement continue est une fonctionelle continue.*

1.7 Opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert

Théorème 14 ***(Opérateurs adjoints)*** *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert ; soit $A : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire borné, alors il existe un unique opérateur linéaire borné $A^* : H_2 \to H_1$ tel que*

$$\forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2, \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle .$$

L'opérateur A^* s'appelle l'adjoint de l'opérateur A.

Pour $H_1 = H_2$; on dit que l'opérateur A est auto-adjoint si

$$A = A^*.$$

Théorème 15 *Soient H_1 et H_2deux espaces de Hilbert ; et $A : H_1 \to H_2$ un opérateur compact, alors l'opérateur adjoint $A^* : H_2 \to H_1$ est aussi compact.*

Corollaire 7 *Si A est auto-adjoint, les valeurs propres de A sont réel et les vecteurs propres correspondantes de valeurs propres distincts sont orthogonal.*

Corollaire 8 *Si A est un opérateur auto-adjoint alors*

$$\sup_{\|x\|=1} | \langle Ax, x\rangle | = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| = \| A \| .$$

Théorème 16 *Dans un espace de Hilbert H, l'opérateur auto-adjoint compact différent de zéro admet au moin une valeur propre différent de zéro.*

Théorème 17 *Dans un espace de Hilbert H, l'opérateur auto-adjoint compact A admet une suite finie ou infinie $x_1, x_2, ...$ de vecteurs propres orthonormal corréspondant à des valeurs propres différent de zéro $\lambda_1, \lambda_2, ...$ $(|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...)$. ces vecteurs forment une base de $R(A)$ l'image de l'opérateur A. c-à-d $\forall f = Ah$ l'égalité de Parseval est*

$$\|f\|^2 = \sum_k |\langle f, x_k\rangle|^2 .$$

Définition 13 *Dans un espace de Hilbert, l'opérateur linéaire auto-adjoint continu est dit stréctement positive si*

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in H \ \textit{et} \ \langle Ax, x\rangle = 0 \ \textit{si et seulement si} \ x = 0$$

Théorème 18 *Soit A un opérateur auto-adjoint compact strectement positive dans un espace de Hilbert de dimension infini H, il existe un système orthonormal $\{x_n\}$ est base de H, et A admet la representation*

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k.$$

Démonstration. Soit $y \in H$ et on considére

$$y_n = y - \sum_{k=1}^{n-1} \langle y, x_k \rangle x_k$$

soit $y_n \Rightarrow z \neq 0$; comme $y_n \in H_n$ on a

$$\frac{\langle Ay_n, y_n \rangle}{\|y_n\|^2} \leq \lambda_n^2.$$

mais $\lambda_n \to 0$ quand $n \to \infty$ donc

$$\frac{\langle Az, z \rangle}{\|z\|^2} = 0.$$

contradiction car A est strictement positive donc $z = 0$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, x_k \rangle x_k, \; y \in H$$

telque $\{x_n\}$ forme une base de H,de plus $Ay = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, x_k \rangle Ax_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle y, x_k \rangle x_k$. ∎

Chapitre 2

La Théorie Spectrale Des Opérateurs Linéaires

2.1 Le spectre d'un opérateur linéaire

Définition 14 *Soit A un opérateur linéaire dans un espace linéaire normé X. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est l'ensemble des nombres complexes λ tel que $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné à domaine dense dans X; λ est appelé point régulier.*

Définition 15 *Le complémentaire de l'ensemble résolvant sur $\mathbb{C}$ est dite ensemble des valeurs specrales de A, noté $\sigma(A)$.*

Si $\lambda \in \sigma(A)$; on a trois possibilités :

1) l'image de $(\lambda I - A)^{-1}$ est dense dans X ; $(\lambda I - A)^{-1}$ existe mais n'est pas borné on dit que λ appartient à le spectre continu de A.

2) $(\lambda I - A)^{-1}$ existe ; mais son domaine n'est pas danse dans X on dit que λ appartient à le spectre résiduel de A.

3) $(\lambda I - A)$ n'est pas inversible, dans ce cas il existe $x \neq 0$ telque $Ax = \lambda x$, on dit que λ est une valeur propere et x est un vecteur propere de A.

Corollaire 9 *Soit λ une valeur proper d'un opérateur linéaire continu A dans un espace normé X, l'ensemble des vecteurs propers correspondant à λ est un sous espace linéaire fermé de X.*

Exemple 2

i) *L'opérateur différentielle $A = d/dt$ dans $C(a, b)$;l'equation*

$$Af - \lambda f = 0 \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

admet la solution $f = e^{\lambda t}$, alors la fonction $e^{\lambda t}$ est un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ ; en effet $\dfrac{de^{\lambda t}}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$.

ii) *Dans le carré $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$,on considère le probléme aux limites :*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda \dfrac{d^2u}{dy^2} = f(x,y) & \forall x, y \in \Omega \\ \quad u = 0 & x, y \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

avec $u \in L^2(\Omega)$, comme $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, alors pour tout $f(x,y) \in L^2(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ telque

$$\| f(x,y) - f_N(x,y) \| \leq \varepsilon,$$

où

$$f_N(x,y) = \sum_{m,n=1}^{N} f_{m,n} \sin mx \sin ny.$$

L'ensemble S des fonctions $f_N(x,y)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et on a

$$\| f \|_2^2 = \frac{\pi^2}{4} \sum_{m,n=1}^{\infty} | f_{m,n} |^2 < \infty,$$

on considére l'equation (2.1.1) *pour $f_N(x,y)$ et on suppose $\lambda \in \mathbb{C}$, mais λ n'est pas sur l'axe de réel négative. La solution unique est*

$$u_N(x,y) = -\sum_{m,n=1}^{N} \frac{f_{m,n}}{m^2 + \lambda n^2} \sin mx \sin ny$$

Pour montre que $u \in L^2(\Omega)$ nous montrons que $| m^2 + \lambda n^2 |$ est borné et différent de zéro :

$\exists \delta > 0$ telque

$$| m^2 + \lambda n^2 | \geq \delta > 0.$$

Si $\lambda = \lambda_{1+} i\lambda_2$ alors :

$$| m^2 + \lambda n^2 |^2 = (m^2 + \lambda_1 n^2)^2 + (\lambda_2 n^2)^2 \geq (m^2 + \lambda_1 n^2)^2 + \lambda_2^2 \geq \lambda_2^2.$$

si $\lambda_2 \neq 0$ alors $\delta = | \lambda_2 |$.

Si $\lambda_2 = 0$ *et* $\lambda_1 \geq 0$ *alors* $\mid m^2 + \lambda n^2 \mid^2 \geq m^4 \geq 1$ *donc*

$$\delta = \begin{cases} \mid \lambda_2 \mid \ \ si\ \lambda_2 \neq 0 \\ \\ 1\ si\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\| u_N \|_2^2 = \frac{\pi^2}{4} \sum_{m,n=1}^{N} \frac{\mid f_{m,n} \mid^2}{\mid m^2 + \lambda n^2 \mid^2} \leq \frac{\pi^2}{4\delta^2} \sum_{m,n=1}^{N} \mid f_{m,n} \mid^2$$
$$\leq \frac{1}{\delta^2} \| f_N \|_2^2 \leq \frac{1}{\delta^2} \| f \|_2^2,$$

donc

$$\| u \|_2^2 \leq \frac{1}{\delta^2} \| f \|_2^2 .$$

L'equation (2.1.1) *peut écrire comme équation opératorielle*

$$A(\lambda)u = f,$$

alors l'opérateur inverse $A(\lambda)^{-1}$ *est un opérateur linéair borné dans* $L^2(\Omega)$ *donc* λ *appartient à l'ensemble résolvant.*

Si $\lambda = -p^2/q^2$ *telque* $p, q \in \mathbb{Z}$ *alors* $u = \sin px \sin qy$ *est un solution de*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda \dfrac{d^2u}{dy^2} = 0 \qquad \forall x, y \in \Omega, \\ \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad x, y \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donc λ *est une valeur propre.*

Corollaire 10 *Si* $\lambda = -p^2/q^2$ *telque* $p, q \in \mathbb{Z}$ *alors l'equation* (2.1.1) *n'admet pas une solution pour* $f(x, y) = \sin px \sin qy$.

On considére M l'ensemble des $\lambda < 0$ telque $\lambda \neq -p^2/q^2$, $p, q \in \mathbb{Z}$ on prend $u(x, y)$ pour $f = f_N \in S$. L'ensemble des pointes de la forme $\lambda = -p^2/q^2$ est dense dans M autrement dit si $\lambda \in M$ alors il existe une suite $\{\lambda_k\}$; $\lambda_k = -p_k^2 \diagup q_k^2$ telque $\lambda_k \to \lambda$,

$$f_k\,(x, y) = \sin p_k x \sin q_k y$$

alors $u_k(x, y)$ correspodant a $u(x, y)$

$$u_k(x, y) = -\frac{\sin p_k x \sin q_k y}{p_k^2 + \lambda q_k^2}$$

la relation entre les normes de f_k et u_k ;

$$\| \, u_k \, \|_2 = \frac{1}{\mid p_k^2 + \lambda q_k^2 \mid} \, \| \, f_k \, \|_2,$$

donc $\dfrac{\|u_k\|_2}{\|f_k\|_2}$ n'est pas borné si $k \to \infty$, alors l'opérateur inverse existe mais n'est pas borné dans S, et S est un sous ensemble dense de $L^2(\Omega)$ alors λ appartient à le spectre continu.

2.2 L'ensemble résolvant d'un opérateur linéaire fermé

Théorème 19 *Soit A un opérateur linéaire fermé dans un espace de Banach X. pour tout $\lambda_0 \in \rho(A)$; la résolvante de A notée par*

$$R(\lambda_0; A) = (\lambda_0 I - A)^{-1}$$

est un opérateur borné dans X.

Proposition 1 *Soient D et S le domaine et l'image de $\lambda_0 I - A$; alors on a $\forall \lambda_0 \in \rho(A)$: $R(\lambda_0; A)$ est un oprateur borné sur S; ainsi $\exists c > o$ telque*

$$\| \, (\lambda_0 I - A)^{-1} y \, \| \leq c \, \| \, y \, \|, \quad y \in S. \tag{2.2.1}$$

Si $x \in D$; $\exists y \in S$ *telque* $y = (\lambda_0 I - A)x$*, alors* (2.2.1) *donne*

$$\parallel x \parallel \leq c \parallel (\lambda_0 I - A)x \ \parallel, \quad x \in D. \tag{2.2.2}$$

Théorème 20 *Soit* A *un opérateur linéaire fermé dans l'espace de Banach* X*, l'ensemble résolvant* $\rho(A)$ *est un domaine (ensemble ouvert) de* $\mathbb{C}$ *et* $R(\lambda; A)$ *est holomorphe.*

Corollaire 11 *Soit* A *un opérateur linéaire fermé dans un espace de Banach* X*.*
$\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$ *on a* $R(\lambda_0; A)$ *vérifie l'identité de Hilbert*

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A).$$

Corollaire 12 *Soit* B *un opérateur linéaire borné dans* X *; la série*

$$\lambda^{-1}(I + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} B^n)$$

converge si $\mid \lambda \mid > \parallel B \parallel$ *.dont sa somme est*

$$R(\lambda; B) = \lambda^{-1}(I + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} B^n) \ pour \ \mid \lambda \mid > \parallel B \parallel .$$

Lemme 1 *Soit* B *un opérateur linéaire borné dans un espace linéaire normé* X*, on définie le rayon spectrale de l'opérateur* B *par*

$$r_\sigma(B) = \lim_{n \to \infty} \parallel B^n \parallel^{1/n} .$$

et on a

$$R(\lambda; B) = \lambda^{-1}(I + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} B^n)$$

pour tout λ *tel que* $\mid \lambda \mid > r_\sigma(B)$*.*

2.3 Le spectre d'un opérateur linéaire compact dans l'espace de Hilbert

Soit $A(\mu)$ un opérateur linéaire compact dans l'espace de Hilbert H , on considère le problème

$$x - A(\mu)x = f.$$

et le problème homogéne associé

$$x - A(\mu)x = 0$$

Définition 16 *Le noyau et l'image de $I - A(\mu)$ sont donnés respectivement par :*

$$\begin{aligned} N(\mu) &= \{x \in H : x - A(\mu)x = 0\}, \\ R(\mu) &= \{y \in H : y = x - A(\mu)x \,;\, x \in H\}, \end{aligned}$$

et le noyau et l'image de $I - A^*(\mu)$ sont donnés respectivement

$$\begin{aligned} N^*(\mu) &= \{x \in H : x - A^*(\mu)x = 0\}; \\ R^*(\mu) &= \{y \in H : y = x - A^*(\mu)x \,;\, x \in H\} \end{aligned}$$

Corollaire 13 *N et N^* sont des sous espaces fermés de H.*

Lemme 2 *$N(\mu)$ et $N^*(\mu)$ sont de dimension finis.*

Corollaire 14 *$N(\mu)^{\perp}$ et $N^*(\mu)^{\perp}$ sont des sous espaces fermé de H.*

Lemme 3 *Il existe $m_1, m_2 > 0$ telque*

$$\forall x \in N(\mu)^{\perp} : m_1 \parallel x \parallel \leq \parallel x - A(\mu)x \parallel \leq m_2 \parallel x \parallel .$$

Démonstration. L'inégalité $\parallel x - A(\mu)x \parallel \leq m_2 \parallel x \parallel$ est vrai car $A(\mu)$ est un opérateur compact alors A est borné. Pour l'inégalité $m_1 \parallel x \parallel \leq \parallel x - A(\mu)x \parallel$, on suppose qu'il n'existe pas $m_1 > 0$, c-à-d ; il existe une suite $\{x_n\} \subset N(\mu)^\perp$ telque

$$\| x_n \|= 1 \text{ et } \| x_n - A(\mu)x_n \| \to 0 \text{ si } n \to \infty$$

comme $A(\mu)$ est compact la suite $\{A(\mu)x_n\}$ contient une sous suite de Cauchy, donc $\{x_n\}$ contient une sous suite de Cauchy car

$$x_n = A(\mu)x_n + (x_n - A(\mu)x_n),$$

comme $N(\mu)^\perp$ est complet alors $\{x_n\}$ est converge vers $x \in N(\mu)^\perp$; comme $\| x_n \|= 1$ alors $\| x \|= 1$ autrement dit x_n converge vers x donc $A(\mu)x_n \Rightarrow A(\mu)x$, on a

$$\| x_n - A(\mu)x_n \| \to 0 \text{ alors } x - A(\mu)x = 0$$

donc $x \in N(\mu)$. On a $x \in N(\mu)$ et $x \in N(\mu)^\perp$ et $\| x \|= 1$ (impossible) car $x \neq 0$.

Donc $\exists m_1 > 0$ tel que $m_1 \| x \| \leq \| x - A(\mu)x \|$. ■

Remarque 5 *Dans l'espace de Hilbert $N(\mu)^\perp$, d'aprés le lemme pécédent, la norme $\| x \|$ est equivalente à*

$$\| x \|_1 = \| x - A(\mu)x \| \ .$$

et le produit scalaire $\langle x, y\rangle$ est equivalent à

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle x - A(\mu)x, y - A(\mu)y\rangle \ .$$

Théorème 21 *$N(\mu)^\perp = R^*(\mu)$ et $N^*(\mu)^\perp = R(\mu)$.*

Lemme 4 *On note par $N_n(\mu)$ le noyau de $(I - A(\mu))^n$, alors*

1) $N_n(\mu)$ est un sous espace de dimension fini de H .

2) $N_n(\mu) \subset N_{n+1}(\mu)$ pour $n = 1, 2, 3...$

3) il existe un entier k telque $N_n(\mu) = N_k(\mu)$ si $n > k$.

Théorème 22 *$R(\mu) = H$ si et seulement si $N(\mu) = 0$.*

Corollaire 15 *1) Si $R(\mu) = H$ alors $(I - A(\mu))^{-1}$ est continu .*

2) $R(\mu) = H$ si et seulement si $N^*(\mu) = 0$.

Démonstration.

Si $R(\mu) = H$ alors $N(\mu) = 0$ et $N(\mu)^{\perp} = H$.d'aprés l'inégalité à gauche de

$$\forall x \in N(\mu)^{\perp} : m_1 \parallel x \parallel \leq \parallel x - A(\mu)x \parallel \leq m_2 \parallel x \parallel .$$

et on a $N(\mu)^{\perp} = H$ alors l'opérateur $(I - A(\mu))^{-1}$ est continu dans H. ■

Corollaire 16 *Dans un espace de Hilbert l'pérateur linéaire compact $A(\mu)$ admet seulement un point spectrale.*

Démonstration.

On suppose que μ n'est pas une valeur propre, alors $N(\mu) = 0$ et $R(\mu) = H$ et $N(\mu)^{\perp} = H$, le domaine de $(I - A(\mu))^{-1}$ est H et d'aprés l'inégalité

$$\forall x \in N(\mu)^{\perp} : m_1 \parallel x \parallel \leq \parallel x - A(\mu)x \parallel \leq m_2 \parallel x \parallel .$$

l'opérateur linéaire $(I - A(\mu))^{-1}$ est borné dans H, d'aprés la définition de l'ensemble résolvant ; alors μ est un élément de l'ensemble résolvant de A. ■

Théorème 23 *L'espace $N(\mu)$ et $N^*(\mu)$ sont de même dimension.*

Lemme 5 *L'ensemble des valeurs propres d'un opérateur linéaire compact $A(\mu) \equiv \mu A$ admet une infinité des points limites dans $\mathbb{C}$.*

2.4 La nature analytique de la résolvante d'un opérateur linéaire compact

Dans un espace de Hilbert ; soit A_n un opérateur de dimension fini, compact

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle x_k \qquad a_k, x_k \in H, \tag{2.4.1}$$

où $x_1, x_2, ..., x_n$ sont linéairement indépendant ; L'equation

$$(I - \mu A_n)x = x - \mu \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle x_k = f, \tag{2.4.2}$$

admet une solution de la forme

$$x = f + \sum_{k=1}^{n} c_k x_k,$$

et on substitue dans (2.4.2) :

$$f + \sum_{k=1}^{n} c_k x_k - \mu \sum_{k=1}^{n} \left\langle f + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, a_k \right\rangle x_k = f$$

comme x_k est linéairement indépendant ; on a

$$c_k - \mu \sum_{j=1}^{n} c_j \langle x_j, a_k \rangle = \mu \langle f, a_k \rangle, \; k = 1, 2, ..., n$$

on résoudre le systéme par la méthode de 'Cramer' :

$$c_k = \frac{D_k(\mu; f)}{D(\mu)}, \; k = 1, 2, ..., n$$

et

$$x = \frac{D(\mu) f + \sum_{k=1}^{n} D_k(\mu; f) x_k}{D(\mu)}. \tag{2.4.3}$$

la solution constitué de deux polynomes de μ de degré supérieur ou ègale à n.

Toute μ ne sont pas des valeurs propres de A, alors ce sont des points où la résolvante est

Holomorphe.

Si μ_0 est un valeur propre de A_n, alors $D(\mu_0) = 0$.

Si μ_0 n'est pas valeur propre de A_n, alors x dans (2.4.3) est une solution de (2.4.2)

$$\forall f \in H,\ R(\mu) = H \Rightarrow N(\mu) = 0.$$

L'ensemble des racines de $D(\mu)$ coincide avec l'ensemble des valeurs propres de A_n, donc toute valeur propre de A_n est un pole de multiplicité finie de la résolvante

$$(I - \mu A_n)^{-1}.$$

Théorème 24 *Dans un espace de Hilbert séparable ; tout valeur propre d'un opérateur linéaire compact A est un pole de multiplicité finie de la résolvante $(I - \mu A_n)^{-1}$.*

Démonstration. Soit A_n un opérateur de dimension finie, soit $\varepsilon > 0$: il existe A_ε telque

$$A = A_n + A_\varepsilon, \text{ où } \parallel A_\varepsilon \parallel < \varepsilon,$$

l'équation

$$(I - \mu(A_n + A_\varepsilon))x = f, \tag{2.4.4}$$

dans le cercle $\mid \mu \mid < 1/\varepsilon$ on a :

$$(I - \mu A_\varepsilon)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k A_\varepsilon^k,$$

On remarque que $(I - \mu A_\varepsilon)^{-1}$ est holomorphe dans le cercle $\mid \mu \mid < 1/\varepsilon$, multipliant l'équation par $(I - \mu A_\varepsilon)^{-1}$ on aura:

$$x - \mu(I - \mu A_\varepsilon)^{-1} A_n x = (I - \mu A_\varepsilon)^{-1} f \tag{2.4.5}$$

on a

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle \, x_k$$

on pose :

$$(I - \mu A_\varepsilon)^{-1} x_k = x_k^*, \; (I - \mu A_\varepsilon)^{-1} f = f^*, \tag{2.4.6}$$

alors l'equation (2.4.5) :

$$x - \mu \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle \, x_k^* = f^*, \tag{2.4.7}$$

x_k^* et f^* sont des fonction holomorphe dans le cercle$\mid \mu \mid < 1/\varepsilon$, comme $x_1, x_2, ..., x_n$ linéairement indépendant, $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ linéairement indépendant et $(I - \mu A_\varepsilon)$ a inverse continu. Pour $\mid \mu \mid < 1/\varepsilon$ la solution de l'equation (2.4.7) est

$$x = \frac{D^*(\mu) f^* + \sum_{k=1}^{n} D_k^*(\mu; f^*) x_k^*}{D^*(\mu)}. \tag{2.4.8}$$

Si μ_0 n'est pas valeur propre de A alors la solution x dans (2.4.8) est holomorphe au voisinage de μ_0 donc $D^*(\mu_0) \neq 0$.

Si μ_0 est pas valeur propre alors $D^*(\mu) = 0$.

On choisir μ tel que $\mid \mu_0 \mid < 1/\varepsilon$ si $D^*(\mu_0)$ na pas de zéro, l'équation admet une solution pour tout f^*, et pour tout f, il est imposible, c-à-d ; l'ensemble de valeurs propres de A dans le cercle $\mid \mu \mid < 1/\varepsilon$ coincide avec l'ensemble de zéro de $D^*(\mu)$. ■

Chapitre 3

Applications Aux Problèmes Inverses

3.1 Problèmes bien et mal posés

Nombreux problèmes mal-posé et/ou des problèmes inverses peuvent être s'écrire sous forme d'équation opératorielle

$$Ax = y, \tag{3.1.1}$$

tel que A un opérateur d'un espace normé X dans l'espace normé Y et $x \in X$, $y \in Y$. La forme la plus simple et la plus courante que cette équation est l'équation intégrale de Fredholm de premiére espèce ; à savoir

$$\int_{\Omega} K(x,y) f(y) \, d\Omega = g(x),$$

Ou plus particulièrement, lorsque $\Omega = [0,1]$,

$$Af(s) \equiv \int_0^1 K(s,t) f(t) \, dt = g(s), \ s \in [0,1] \tag{3.1.2}$$

3.2 Equation Opératorielle

$$Ax = y \tag{3.2.1}$$

Si A admet un inverse continu A^{-1} de Y dans X, alors l'équation $Ax = y$ admet une solution $x = A^{-1}y$.

On conclure que l'équation opératorielle $Ax = y$ confronte à trois difficulés :

$a)$ $R(A)$ ne peut pas être Y c-à-d ; $\exists y \in Y$ telque $y \notin R(A)$.

$b)$ A n'est pas injective c-à-d ; l'opérateur admet Noyau $N(A)$.

$c)$ si l'opérateur admet inverse, cet inverse n'est pas continu.

Il ya différentes façons dont un ou plusieurs de ces difficultés peuvent être surmontées, comme nous allons maintenant discuter de :

Le premier résultat nous montrons est due à *Andrei Tikhonov Nikolaevich* $(1906 - 1994)$:

Théorème 25 *Soit X et Y deux espaces linéaires normés et A un opérateur continu injective* *de X dans Y. Soit S un sous espace compact de X et soit $A\backslash S$ la restriction de A sur S, alors $(A\backslash S)^{-1}$ est continu.*

Démonstration. *A^{-1} est continu alors $\forall x \in S : \exists c > 0$ telque*

$$\|Ax\| \geq c \|x\| . \tag{3.2.3}$$

On suppose A^{-1} n'est pas continu alors il existe une suite $\{x_n\}$ telque $\|x_n\| = 1$ et $\|Ax_n\| < \dfrac{1}{n}$, comme S est compact et $\{x_n\} \in S$ il existe une sous suite converge vers $x \in S$, $\|x\| = 1$ et

$$\|Ax\| = \|A(x - x_n) + Ax_n\| \leq \|A\| . \|x - x_n\| + \|Ax_n\| \to 0.$$

Alors $Ax = 0$ mais $\|x\| = 1$ donc A n'est pas injective ;

Donc (3.2.3) *est valider et $(A\backslash S)$ continu.* ■

Remarque 6 *Pour appliqueé cet théorème sur l'equation integrale* (3.1.2) *on a la restriction de la fonction $f(t)$ sur sous espace compact de $C[0, 1]$.*

Théorème de *Tikhonov* offres avec l'inverse continu par la restriction de domaine,et aussi l'image de A. Nous maintenant considére comment nous pouvons agrandir l'image de A. On suppose que A est un opérateur linéaire continu de l'espace de Hilbert H_1 dans l'espace de Hilbert H_2 ; la ferméture de l'image de A, $\overline{R(A)}$, est un sous espace fermé de H_2, H_2 est decomposé de $\overline{R(A)}$ et le complément orthogonal $\overline{R(A)}^{\perp} = R(A)^{\perp}$ (car le complément orthogonal est toujours fermé), ainsi la ferméture de $R(A)+R(A)^{\perp}$ est H_2 ; autrement dit ; le sous espace $R(A)+R(A)^{\perp}$ de H_2 est dense dans H_2 ; on montre que comment prolonge l'inverse de l'opérateur de $R(A)$ à $R(A) + R(A)^{\perp}$?. On suppose que $y \in R(A) + R(A)^{\perp}$ alors Py est la projection de y sur $\overline{R(A)}$ est en fait dans $R(A)$, Cela signifie qu'il ya $x \in H_1$ telque

$$Ax = Py \tag{3.2.4}$$

Ax est la projection de y sur $\overline{R(A)}$ et Ax est un élément de $\overline{R(A)}$ qui est la plus proche de y ;

$$\|Ax - y\| = \inf_{u \in H_1} \|Au - y\| . \tag{3.2.5}$$

Pour tout $y \in H_2$ on peut ecrire

$$y = m + n\,; \;\; m \in \overline{R(A)}\,; \quad n \in R(A)^{\perp} .$$

Où $m = Py$, on dit que $m \in R(A)$; $\exists x \in H_1$ telque

$$y - Ax = n \in R(A)^{\perp} \tag{3.2.6}$$

x est appelé une solution des moindres carrés de l'équation, car il minimise la norme $\|Au - y\|$. Mais on a $R(A)^{\perp} = N(A^*)$, (on a $N(A)$ et $N(A)^{\perp}$ sont des sous espaces fermé). Cela signifie que $y - Ax \in N(A^*)$ donc

$$A^*Ax = A^*y, \tag{3.2.7}$$

où x est une solution unique des moindres carrés si et seulement si A^*A n'a pas de solution nulle (ssi A n'a pas de solution nulle). (Car si $Ax = 0$ alors $A^*Ax = 0$ et $A^*Ax = 0$ alors $\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 = 0$ donc $Ax = 0$).

On suppose que A admet une Noyau donc la solution de $Ax = Py$ n'est pas unique, alors il existe un ensemble M de solution x qui vérifie $\|Ax\| < c\|x\|$ où M est un ensemble fermé et convexe.

M convexe car

$$A^*Ax_1 = A^*y,\ A^*Ax_2 = A^*y, \text{ et } x = \lambda x_1 + (1-\lambda)\,x_2 \Rightarrow A^*Ax = A^*y.$$

Il existe unique $x \in M$ qui minimiser $\|x\|$ dans M, où x d'être la solution généralisée de l'équation $Ax = y$ pour $y \in R(A) + R(A)^{\perp}$ qui est un sous espace dense dans H_2. Cette solution est appelé la solution des moindres carrés de norme minimale.

Définition 17 *L'application* A^+ *de* $D(A^+) = R(A) + R(A)^\perp$ *dans* $D(A)$ *qui associe* y *à la solution unique des moindres carrés de norme minimale,* A^+y*, est appelée* $Moore - Penrose$ *d'inverse généralisée de* A*.*

Remarque 7 *Nous avons contourné la difficulté que* A *admet une noyau par choisir* x *de la norme minimale. Une autre façon de procéder est de* $x \in N(A)^\perp$*.*

Corollaire 17 *Soit* A *un opérateur linéaire continu de* H_1 *dans* H_2*. Si* $y \in D(A^+)$ *alors* $A^+(y)$ *est une solution unique des moindres carrés dans* $N(A)^\perp$*.*

Remarque 8 *Le corollaire rédiger que* $x_n = A^+y_n$ *est une solution unique de* $A^*Ax_n = A^*y_n$ *dans* $N(A)^\perp$*, ainsi* $\{x_n\} \subset N(A)^\perp$*,* $x_n \Rightarrow x$ *et* $N(A)^\perp$ *est fermé implique que* $x \in N(A)^\perp$*. Aussi* $A^*Ax_n \Rightarrow A^*Ax$ *et* $A^*Ax_n = A^*y_n \Rightarrow A^*y$ *implique que* $A^*Ax = A^*y$*. Mais* $A^*Ax = A^*y$ *implique que* $A^*(Ax - y) = 0$ *donc* $(Ax - y) \in N(A^*) = R(A)^\perp$ *et* $y \in R(A) + R(A)^\perp = D(A^+)$*. Ainsi* $y \in D(A^+)$ *et* x *est une solution de* $A^*Ax = A^*y$ *dans* $N(A)^\perp$ *donc le corollaire rédiger que* $x = A^+y$ *et* A^+ *est un opérateur fermé.*

Corollaire 18 *Si* $\tilde{A} \equiv A \backslash N(A)^\perp$ *représente la restriction de* A *sur* $N(A)^\perp$*,*
pour tout $y \in D(A^+) = R(A) + R(A)^\perp, A^+y = \tilde{A}^{-1}Py$ *où* Py *est le projection de* y *sur* $\overline{R(A)}$*.*

Remarque 9 *Nous avons commence avec un opérateur linéaire continu qui pourrait avoir un noyau (c-à-d ne doivent pas être injective) et qui pourrait avoir une image* $R(A)$ *ce qui n'était pas dense dans* H_2*. On a construit un inverse généralisée* A^+ *de* A*, qui est définit sur un sous espace dense dans* H_2*. et qui donne un* x *unique pour tout* $y \in D(A^+)$*. La question critique est de savoir si cette inverse généralisée est un opérateur continu. En générale, il n'est pas, c'est simplement un opérateur férmé.*

Théorème 26 *Soient* H_1 *et* H_2 *deux espaces de Hilbert, et* A *un opérateur linéaire continu de* H_1 *dans* H_2*.* A^+ *l'inverse généralisée de* $D(A^+)$ *dans* H_1 *est un opérateur fermé.* A^+ *est continu si et seulement si* $R(A)$ *est fermé.*

Démonstration. A^+ est fermé ssi

$$\{y_n\} \subset D\left(A^+\right) \text{ et } y_n \Rightarrow y \text{ et } A^+y_n \Rightarrow x,$$

implique que

$$y \in D\left(A^{+}\right) \text{ et } x = A^{+}y.$$

On suppose que A^{+} est continu. Soit $\{y_n\}$ une suite d'élément dans $R(A)$ converge vers y. Soit $x_n = A^{+}y_n$ alors $x_n \in N(A)^{\perp}$. Comme A^{+} est continu et $N(A)^{\perp}$ est fermé $x_n \Rightarrow x = A^{+}y$ $\in N(A)^{\perp}$. On d'autre terme $Ax_n = y_n$ donc $Ax_n \Rightarrow Ax$ et $y_n \Rightarrow Ax \in R(A)$. Ainsi $y = Ax$ et $y \in R(A)$. Donc $R(A)$ est fermé.

On suppose que $R(A)$ est fermé alors $D(A) = \overline{R(A)} + R(A)^{\perp} = H_2$, donc A^{+}est un opérateur linéaire fermé de H_2 dans H_1 alors A^{+} est continu. ■

Théorème 27 *Si A un opérateur compact alors $R(A)$ est fermé ssi $R(A)$ de dimension fini.*

3.3 Décomposition en valeurs singuliéres

Soit A un opérateur linéaire compact d'un espace de Hilbert H_1 dans l'espace de Hilbert H_2. On a A^*A et AA^* sont des opérateurs linéaires auto-adjoint compact de H_1 dans H_2 réspectivement, les opérateurs A^*A et AA^* sont positives et ses valeurs propres sont positives c-à-d $\langle A^*Ax, x\rangle \geq 0$ et $\langle AA^*y, y\rangle \geq 0$. Car $\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$. et $\langle AA^*y, y\rangle = \langle A^*y, A^*y\rangle = \|A^*y\|^2 \geq 0$. On utilise le produit scalaire dans H_1 et H_2

$$\langle AA^*y, y\rangle_2 = \langle A^*y, A^*y\rangle_1 = \|A^*y\|_1^2.$$

Les opérateurs A^*A et AA^* ont la même valeurs propres positives. On suppose que x est un vecteur propre de A^*A correspondant à $\lambda > 0$, alors $A^*Ax = \lambda x$ donc $Ax \neq 0$, alors$A(A^*Ax) = A^*A(Ax) = \lambda(Ax)$, Donc Ax est un vecteur propre de AA^* correspondant à λ, et d'une façon sumilaire est vice versa.

On a l'opérateur A^*A est auto-adjoint ; d'aprés théorème (17) ; A^*A admet une suite finie ou infinie des vecteurs propres orthonormal $v_1, v_2, ...$ correspondant à valeurs propres positives $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ...$, et v_j sont complet dans $\overline{R(A^*A)}$ (la fermétur de l'image de A^*A).

On a $\overline{R(A^*A)} = N(A^*A)^{\perp}$ et $N(A^*A)^{\perp} = N(A)^{\perp}$. On a $N(A^*A) = N(A)$, car si $Ax = 0$ alors $A^*Ax = 0$, et si $A^*Ax = 0$ alors $\langle A^*Ax, x\rangle = 0 = \|Ax\|^2$ donc $Ax = 0$.

Soit $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$ et $u_j = \mu_j^{-1}Av_j$, alors

$$A^*u_j = \mu_j^{-1}A^*Av_j = \mu_j^{-1}\lambda_j v_j = \mu_j v_j, \tag{3.3.1}$$

et

$$Av_j = \mu_j u_j \tag{3.3.2}$$

donc

$$AA^*u_j \ = \mu_j Av_j = \mu_j^2 u_j = \lambda_j u_j \tag{3.3.3}$$

Ainsi $\{u_j\}$ est un ensemble des vecteurs propres orthonormal de AA^*, d'aprés Théorème (17) ; $\{u_j\}$ est complet dans la fermeture $\overline{R(AA^*)} = N(AA^*)^{\perp} = N(A^*)^{\perp}$

Le systéme $\{v_j, u_j, \mu_j\}$ est appelé un systéme singulier pour l'opérateur A et les nombres μ_j sont appelé les valeurs singulièrs de A.

Le noyau $N(A)$ est un sous espace fermé de H_1 ; donc

$$\forall x \in H_1 \text{ alors } x = m + n,\ m \in N(A)\,,\ \ n \in N(A)^{\perp}$$

et m est la projection de x sur $N(A)$: $m = Px$, comme v_j sont complet dans $N(A)^{\perp}$

$$x = Px + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j v_j \tag{3.3.4}$$

où $\alpha_j = \langle x, v_j\rangle$ donc

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j Av_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_j u_j, \tag{3.3.5}$$

Cet est appelé la decomposition en valeurs singulières (SVD) de l'opérateur A.

Nous revenons maintenant à l'équation

$$Ax = y \tag{3.3.6}$$

Si $y \in R(A)$, alors cet équation admet une solution. On a u_j sont complet dans $N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$ ainsi si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_j u_j = y$$

alors

$$\begin{aligned} \langle y, u_j \rangle &= \alpha_j \mu_j = \mu_j \langle x, v_j \rangle \qquad (3.3.7) \\ \mu_j^{-1} \langle y, u_j \rangle &= \alpha_j \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} |\langle y, u_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 = \|x\|^2 - \|Px\|^2 \leq \|x\|^2 < \infty.$$

Si $y \in \overline{R(A)}$ et

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} |\langle y, u_j \rangle|^2 < \infty, \qquad (3.3.8)$$

alors

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_j \rangle}{\mu_j} v_j + v \qquad (3.3.9)$$

où $v \in N(A)$, est une solution de (3.3.6).

On conclure que l'équation (3.3.6) admet une solution ssi $y \in \overline{R(A)}$ et vérifier la condition (3.3.8).

Le condition (3.3.8) est appelé critére d'existence de *Picard*.

Nous avons montre précedemment que, lorsque $y \in R(A) + R(A)^{\perp}$; $A^{+}y$ donne une unique élément de $N(A)^{\perp}$ qui vérifier (3.2.5). L'equation (3.3.9) montre que si A est un opérateur compact cet solution est celle obtenue en prenant $v = 0$. Ainsi

$$A^{+}y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_j \rangle}{\mu_j} v_j \qquad (3.3.10)$$

On remarque que si on note $A^{+}y$ par x dans $Ax = Py$ alors

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \langle y, u_j \rangle u_j = Py.$$

On conclure que si on prenant l'inverse généralisée on fait deux chose : remplace $y \in R(A) + R(A)^{\perp}$ par leur projection Py sur $\overline{R(A)}$, trouver $x \in N(A)^{\perp}$ telque $Ax = Py$. Léquation (3.3.10) montré que s'il existe infinie des valeurs singuliéres alors A^{+} n'est pas borné car par exemple ;

$$\|u_k\| = 1, \ \left\|A^{+}u_k\right\| = 1/\mu_k \rightarrow \infty \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

Afin d'obtenir une approximation de $A^{+}y$ on peut tronquer l'expansion (3.3.10) et de prendre l'approximation éniéme

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle y, u_j \rangle}{\mu_j} v_j, \tag{3.3.11}$$

alors $\|x_n - A^{+}y\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Cependant, la question se pose de savoir combien de condition à prendre dans l'expression. Pour nous devons considérer l'erreur dans les données. On suppose qu'au lieu d'évaluer l'équation (3.3.11) pour y, nous avons effectivement l'évaluer pour certains proximité y^{δ} telque$\left\|y - y^{\delta}\right\| \leq \delta$. Nous obtiendrons un bond de différence entre le x_n formé à partir de y^{δ}, appelé x_n^{δ}, et x_n vrai qui formé de y : nous permettra d'estimer $\left\|x_n - x_n^{\delta}\right\|$. On a

$$\begin{aligned}
\left\|x_n - x_n^{\delta}\right\|^2 &= \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{\langle y - y^{\delta}, u_j \rangle}{\mu_j} v_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left|\langle y - y^{\delta}, u_j \rangle\right|^2}{\mu_j^2} \\
&\leq \frac{1}{\mu_n^2} \sum_{j=1}^{n} \left|\left\langle y - y^{\delta}, u_j \right\rangle\right|^2 \leq \frac{\delta^2}{\mu_n^2}.
\end{aligned}$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned}
\left\|x_n^{\delta} - A^{+}y\right\| &\leq \left\|x_n - A^{+}y\right\| + \left\|x_n - x_n^{\delta}\right\| \\
&\leq \left\|x_n - A^{+}y\right\| + \delta\mu_n^{-1} \qquad (3.3.12)
\end{aligned}$$

De cette borne sur l'erreur de solution illustre les propriétés caractéristiques d'une solution à un problème mal posé : pour n fixe, l'erreur diminue avec δ, mais pour un δ donné l'erreur tend vers l'infini comme $n \rightarrow \infty$. L'inégalité (3.3.12) implique que dans le choix de n, dit $n(\delta)$, correspondant à une erreur de donnée δ, nous devons le faire de telle sorte que

$$\delta\mu_n^{-1} \to 0 \text{ quand } \delta \to 0.$$

Il ya donc deux exigences contradictoires sur n : il doit être assez grand pour faire $\|x_n - A^+y\|$ petite, mais pas si grand que de faire $\delta\mu_n^{-1}$ grande. Un choix de $n(\delta)$ telque

$$x_n^\delta \Rightarrow A^+y \text{ quand } \delta \to 0,$$

est appelé un schéma régulier pour l'approximation de A^+y.

3.4 Régularisation

Comme précédement, soit A un opérateur linéaire compact de H_1 dans H_2. L'inverse généralisée A^+ donne une 'solution' de (3.3.6) pour tout $y \in R(A) + R(A)^\perp$, sous espace dense de H_2, qui satisfaire critère de Picard. Cependant A^+ n'est pas continu à moins que $R(A)$ est de dimension fini (et donc fermé). L'absence de continuté de A^+ se pose parce que, μ_j tend vers zéro, et ce à tour de rôle peut être attribué au fait que A^*A n'a pas d'inverse borné. L'opérateur A^*A a été soulevée dans l'équation (3.2.7). Pour trouvé A^+y nous avons d'abord trouvé Ax le plus proche de y, dans le sens de (3.2.5), puis, s'il existe plus de x correspondant de Ax, on choisir x ayant norme minimale.

Maintenant, au lieu de le faire, on choisir un paramétre positive α et on trouve $x \in H_1$ qui minimise

$$F(u) = \|Au - y\|_2^2 + \alpha \|u\|_1^2 \tag{3.4.1}$$

pour $u \in H_1$.

Pour faire ce on définie l'espace de Hilbert $H = H_1 \times H_2$ d'éléments $z \equiv \{x, y\}$ telque

$x \in H_1$, $y \in H_2$. On définie le produit scalaire dans cette espace par

$$\langle z_1, z_2 \rangle_H = \langle y_1, y_2 \rangle_2 + \alpha \langle x_1, x_2 \rangle_1 \tag{3.4.2}$$

de telle sorte que

$$\|z\|_H^2 = \|y\|_2^2 + \alpha \|x\|_1^2 \tag{3.4.3}$$

Nous pouvons maintenant imiter pour cet espace que nous avons fait avec H_2 dans 3.2. Pour l'opérateur linéaire continu A qui prendre $x \in H_1$ vers $Ax \in H_2$ induit un autre opérateur linéaire continu, appelé A_H, qui prendre $x \in H_1$ vers $\{x, Ax\}$ dans H. A_H est continu, parce que

$$\|\{x, Ax\}\|_H^2 = \|Ax\|_2^2 + \alpha \|x\|_1^2 \leq \left\{\|A\|^2 + \alpha\right\} \|x\|_1^2$$

L'image, $R(A_H)$, est l'ensemble de ceux $\{x, y\} \in H$ telque $x \in H_1$, $y = Ax$, et $R(A_H)$ est un sous espace fermé de H.

Corollaire 19 *Si la suite $\{x_n, Ax_n\} \in R(A_H)$ converge vers $\{x, y\}$ (converge en norme (3.4.3)), alors $Ax = y$, c-à-d ; $R(A_H)$ est fermé.*

L'espace de Hilbert H est decomposé de $R(A_H)$ et le complément orthogonal $R(A_H)^{\perp}$, pour $y \in H_2$ il existe $x \in H_1$ telque $\{x, Ax\}$ est un élément de $R(A)$ qui est la plus proche de $\{0, y\}$, c-à-d ;

$$\|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2 = \inf_{u \in H_1} \left\{\|Au - y\|^2 + \alpha \|u\|^2\right\}. \tag{3.4.4}$$

on a

$$\{0, y\} \in H; \;\; \{0, y\} = m + n, \, m \in R(A_H), \, n \in R(A_H)^{\perp},$$

où m est la projection de $\{0, y\}$ sur $R(A_H)$. Comme $m \in R(A_H)$, il existe $x \in H_1$ telque $m = \{x, Ax\}$, de telle sorte que

$$\{0, y\} - \{x, Ax\} = n \in R(A_H)^{\perp}. \tag{3.4.5}$$

On définie l'opérateur adjoint de A_H de H_1 dans H. On remarque que pour $x_1 \in H_1$, $y_1 \in H_2$, c-à-d. Pour $\{x_1, y_1\} \in H$, la fonctionelle

$$\langle \{x, Ax\}, \{x_1, y_1\} \rangle_H = \langle Ax, y_1 \rangle_2 + \alpha \langle x, x_1 \rangle_1$$

est une fonctionelle linéaire continue dans l'espace de Hilbert H_1. Par théorème representation de *Riesz*, il existe un élément $A_H^* \{x_1, y_1\}$ de H_1 telque

$$\langle \{x, Ax\}, \{x_1, y_1\} \rangle_H = \langle x, A_H^* \{x_1, y_1\} \rangle_1$$

Ainsi

$$\langle x, A_H^* \{x_1, y_1\} \rangle_1 = \langle Ax, y_1 \rangle_2 + \alpha \langle x, x_1 \rangle_1 = \langle x, A^* y_1 \rangle_1 + \alpha \langle x, x_1 \rangle_1$$

donc

$$\langle x, A_H^* \{x_1, y_1\} - A^* y_1 - \alpha x_1 \rangle_1 = 0$$

puisque ce vrai pour tout $x \in H_1$ on a

$$A_H^* \{x_1, y_1\} = A^* y_1 + \alpha x_1 \tag{3.4.6}$$

Nous revenons maintenant à l'équation (3.4.5) et on utulisons le resultat $R(A_H)^\perp = N(A_H^*)$ qui donne

$$A_H^* \{x, Ax - y\} = 0$$

telque A_H^* donner par (3.4.6)

$$A_H^* (Ax - y) + \alpha x = 0,$$

ou

$$(A^* A + \alpha I) x = A^* y \tag{3.4.7}$$

qui admet une solution unique

$$x = x_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* y \tag{3.4.8}$$

Nous avons maintenant montre que si $\alpha \to 0$, la solution de cette équation tend vers A^+y, pour y (stisfaire la condition de Picard) pour lequel A^+y existe. On remarque que

$$\alpha x = A^*y - A^*Ax \in R(A^*) \tag{3.4.9}$$

mais $\overline{R(A^*)} = N(A)^\perp$, donc $x \in N(A)^\perp$. Mais nous montré que v_j engendré $N(A)^\perp$ donc

$$x = x_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v_j \ ; \quad c_j = \langle x, v_j \rangle ,$$

on substitué cet dans (3.4.7) on trouve

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + \alpha) c_j v_j = A^*y,$$

de telle sorte que

$$(\lambda_j + \alpha) c_j = \langle A^*y, v_j \rangle = \langle y, Av_j \rangle = \mu_j \langle y, u_j \rangle ,$$

et donc

$$x_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j \langle y, u_j \rangle v_j}{\lambda_j + \alpha} \tag{3.4.10}$$

Pour montre que $x_\alpha \to A^+y$ nous procédons en deux étapes, le premier nous montre que cet opérateur qui donne x_α par le condition de y est borné. On remarque que comme λ_j sont positive et tend vers zéro on peut trouver $N \geq 0$ tel que

$$\lambda_j \geq 1 \text{ pour } j \leq N \ , \ 0 < \lambda_j < 1 \text{ pour } j > N.$$

Lorsque $j \leq N$

$$\frac{\mu_j}{\lambda_j + \alpha} < \frac{1}{\mu_j} \leq 1,$$

Si $j > N$

$$\frac{\mu_j}{\mu_j+\alpha} < \frac{\mu_j}{\alpha} < \frac{1}{\alpha},$$

de telle sorte que

$$si \quad \beta = \max(1, 1/\alpha)$$

alors

$$\|x_\alpha\|^2 \le \beta^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\langle y, u_j\rangle|^2 \le \beta^2 \|y\|^2. \tag{3.4.11}$$

Maintenant nous montrons la convergence de x_α vers A^+y, pour y qui vérifie le critére d'existence de Picard. On remarque que

$$A^+y - x_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_j} - \frac{\mu_j}{\lambda_j+\alpha}\right) \langle y, u_j\rangle v_j,$$

de telle sorte que

$$\left\|A^+y - x_\alpha\right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\mu_j(\lambda_j+\alpha)}\right)^2 |\langle y, u_j\rangle|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_j\rangle|^2}{\lambda_j} < \infty. \tag{3.4.12}$$

On choisir $\varepsilon > 0$. Comme la série dans (3.4.12) converge, la somme de $N+1$ à ∞ doit tendre vers zéro lorsque N tend vers l'infini, donc on peut trouver N telque la somme est inférieure $\varepsilon/2$, et

$$\left\|A^+y - x_\alpha\right\|^2 < \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\alpha}{\mu_j(\lambda_j+\alpha)}\right)^2 |\langle y, u_j\rangle|^2 + \frac{\varepsilon}{2},$$

mais la somme sur la droite est une somme finie, et on peut écrire

$$\left\|A^+y - x_\alpha\right\|^2 \le \alpha^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{|\langle y, u_j\rangle|^2}{\lambda_j^3} + \frac{\varepsilon}{2} = S_N\alpha^2 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4.13}$$

Finalement, on choisir α de telle sorte que

$$\alpha < \sqrt{\varepsilon/(2S_N)}, \text{ alors } \left\|A^+y - x_\alpha\right\|^2 < \varepsilon$$

donc

$$\lim_{\alpha \to 0} \left\| A^{+}y - x_{\alpha} \right\| = 0.$$

Nous avons prouvé que, pour α, x_{α} est un opérateur continu et que, pour les y pour les quels $A^{+}y$ existe, x_{α} converge vers $A^{+}y$ quand $\alpha \to 0$.

On suppose que y, les données, est sujette à erreur. Cela signifie qu'au lieu de résoudre l'équation (3.4.7) pour y, nous sommes entrain de le résoudre pour certains proximité y^{δ} telque $\left\| y - y^{\delta} \right\| \leq \delta$. Nous souhaitons que obtenir une majoration de la différence entre le x_{α} formé à partir de y^{δ}, que nous appellerons x_{α}^{δ}, et la 'vrai' x_{α} formé à partir de y : On cherche à estimer $\left\| x_{\alpha} - x_{\alpha}^{\delta} \right\|$. On a

$$x_{\alpha} - x_{\alpha}^{\delta} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{(\lambda_j + \alpha)} \left\langle y - y^{\delta}, u_j \right\rangle v_j$$

d'aprés (3.4.10) et (3.4.11), On a

$$\left\| x_{\alpha} - x_{\alpha}^{\delta} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{(\lambda_j + \alpha)^2} \left| \left\langle y - y^{\delta}, u_j \right\rangle \right|^2 \leq \beta^2 \left\| y - y^{\delta} \right\|^2,$$

où $\beta = \max(1, 1/\alpha)$. Comme la série est converge pour $\varepsilon > 0$ on peut trouver N telque la somme de $N+1$ à ∞ est inférieur de ε. Maintenant

$$\frac{\lambda_j}{(\lambda_j + \alpha)^2} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \alpha} . \frac{1}{\lambda_j + \alpha} < 1. \frac{1}{\alpha},$$

donc

$$\left\| x_{\alpha} - x_{\alpha}^{\delta} \right\|^2 = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle y - y^{\delta}, u_j \right\rangle \right|^2 + \varepsilon < \frac{\left\| y - y^{\delta} \right\|^2}{\alpha} + \varepsilon$$

et comme cette est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left\| x_{\alpha} - x_{\alpha}^{\delta} \right\| \leq \frac{\left\| y - y^{\delta} \right\|^2}{\sqrt{\alpha}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \tag{3.4.14}$$

De cette borne sur l'erreur de solution illustre les propriétés caractéristiques d'une solution à un problème mal posé : pour α fixe , d'erreur diminue avec δ, mais pour un δ donné l'erreur tend vers l'infini comme $\alpha \to 0$. L'inégalité (3.4.14) implique que dans le choix d'un α, dit $\alpha(\delta)$, correspondant à une erreur de donnée δ, nous devons le faire de telle sorte que

$$\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} \to 0 \text{ quand } \delta \to 0. \tag{3.4.15}$$

alors

$$\begin{aligned} \left\| x^{\delta}_{\alpha(\delta)} - A^{+}y \right\| &\leq \left\| x^{\delta}_{\alpha(\delta)} - x_{\alpha(\delta)} \right\| + \left\| x_{\alpha(\delta)} - A^{+}y \right\| \\ &\leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \left\| x_{\alpha(\delta)} - A^{+}y \right\|, \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Nous avons déja montré que le second terme tend vers zéro avec α. Le choix de $\alpha(\delta)$ telque

$$x^{\delta}_{\alpha(\delta)} \Rightarrow A^{+}y \text{ quand } \delta \to 0,$$

est appelé un schéma régulier pour l'approximation de $A^{+}y$.

L'inégalité (3.4.16) donne une borne pour l'erreur dans $A^{+}y$. L'erreur a deux parties, la première est due à l'erreur dans les données, tandis que la seconde est celle due à l'utilisation α plutôt que la limite que $\alpha \to 0$, il est théoriquement séduisante de se demander si nous pouvons choisir la façon dont α dépend de δ, c-à-d. $\alpha(\delta)$, de sorte que les deux termes d'erreur sont du même ordre.

Pour délimiter le second terme nous revenons à l'inégalité (3.4.13) ceci est valable pour arbitraire ε. si nous prenons $\varepsilon = 2S_N\alpha^2$ nous trouvons

$$\left\| A^{+}y - x_{\alpha} \right\|^2 \leq 2S_N\alpha^2 \text{ quand } \alpha \to 0.$$

donc

$$\left\| A^{+}y - x_{\alpha} \right\| = O(\alpha).$$

Cela signifie que si nous utilisons le choix simple de $\alpha(\delta) = k\delta$ puis le premier terme de (3.4.15) sera de l'ordre $\delta^{1/2}$ tandis que le second sera de l'ordre δ ; autrement dit si nous prenons $\alpha(\delta) =$

$C\delta^{2/3}$ alors $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)}$ et α seront tous les deux de l'ordre $\delta^{2/3}$, donc

$$\left\| x^{\delta}_{\alpha(\delta)} - A^{+}y \right\| = O\left(\delta^{2/3}\right).$$

3.5 Principe de Morozov

Nous continuons de supposer que A est un opérateur linéaire compact de H_1 dans H_2. Le choix de $\alpha(\delta) = C\delta^{2/3}$ est théoriquement attrayante, mais difficile à appliquer. Morozov a présente un principe dans le quel le choix de α est fait pour que l'erreur dans la prédiction de y^{δ} c-à-d ; $\left\| Ax^{\delta}_{\alpha} - y^{\delta} \right\|$ est égale à l'erreur dans les données, c-à-d ;

$$\left\| Ax^{\delta}_{\alpha} - y^{\delta} \right\| = \left\| y - y^{\delta} \right\| = \delta. \tag{3.5.1}$$

Nous allons montrer que puor tout $\delta > 0$ est une valeur unique de α satisfaisant $(3.5.1)$.

D'abort comment nous choisissons x_{α} pour y donné : nous avons choisi en utilisant $(3.4.4)$. L'élément $\{0, y\}$ est remplacé par le plus proche $\{x, Ax\}$ pour la norme de H. nous peut faire car $R(A_H)$, à la différence de $R(A)$, est toujours fermé, cela signifie que dans le calcul de x_{α}, il n'ya pas de perte de généralité en suppose que $y = Ax$, c-à-d ; $y \in R(A)$, donc nous supposons que $y \in R(A)$, l'erreur dans les données est inférieur ou égal à δ, et que le rapport signal sur la bruit est supérieur à l'unité

$$y \in R(A), \left\| y - y^{\delta} \right\| \leq \delta, \quad \left\| y^{\delta} \right\| > \delta. \tag{3.5.2}$$

H_2 est decomposé en $\overline{R(A)}$ et $R(A)^{\perp}$ et on a $\overline{R(A)} = N(A^{*})^{\perp}$ et l'équation (3.3.3) rédiger que $\{u_j\}$ sont complet dans $N(A^{*})^{\perp}$. Ainsi

$$y^{\delta} = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle y^{\delta}, u_j \right\rangle u_j + Py^{\delta} \tag{3.5.3}$$

telque Py^{δ} est la projection de y^{δ} sur $R(A)^{\perp}$. L'equation (3.4.10) donne x^{δ}_{α}. Pour trouver Ax^{δ}_{α}

on peut appliquer A terme par terme pour obtenir

$$Ax_\alpha^\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{\langle y^\delta, u_j\rangle u_j}{\lambda_j + \alpha}$$

car $\left\|Ax_\alpha^\delta\right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j + \alpha}\right)^2 \left|\langle y^\delta, u_j\rangle\right|^2 \leq \left\|y^\delta\right\|^2$. Ainsi

$$y^\delta - Ax_\alpha^\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha \langle y^\delta, u_j\rangle u_j}{\lambda_j + \alpha} + Py^\delta,$$

et

$$\left\|Ax_\alpha^\delta - y^\delta\right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\lambda_j + \alpha}\right)^2 \left|\left\langle y^\delta, u_j\right\rangle\right|^2 + \left\|Py^\delta\right\|^2.$$

Cette équation montré que $f(\alpha) = \left\|Ax_\alpha^\delta - y^\delta\right\|$ est une fonction monotone croissante de α pour $\alpha > 0$. Pour montrer qu'il existe une valeur unique de α telque $f(\alpha) = \delta$ nous doit montre que

$$\lim_{\alpha \to 0^+} f(\alpha) \leq \delta \text{ et } \lim_{\alpha \to \infty} f(\alpha) > \delta.$$

Comme $y \in R(A)$, $Py = 0$ et ainsi

$$\lim_{\alpha \to 0^+} f(\alpha) = \left\|Py^\delta\right\| = \left\|P\left(y^\delta - y\right)\right\| \leq \left\|y^\delta - y\right\| \leq \delta.$$

Par l'égalité de Parseval :

$$\lim_{\alpha \to \infty} f(\alpha) = \left\|y^\delta\right\| > \delta.$$

ce qui prouve le résultat requis.

Nous conclure en montrant que le choix $\alpha(\delta)$ selon le principe fournit un schéma régulier d'approximation de A^+y, c-à-d

$$x_{\alpha(\delta)}^\delta \Rightarrow A^+y \text{ quand } \delta \to 0.$$

Encore une fois, sans perte de généralité, nous pouvons prendre $y \in R(A)$ de telle sorte que il existe unique $u \in N(A)^{\perp}$, que nous dit $x = A^{+}y$, telque $y = Ax$. Puisque nous avons montré que α est uniquement déterminé par δ, on peut écrire $x^{\delta}_{\alpha(\delta)}$ par $x(\delta)$.

D'abort nous montré que $x(\delta)$ soit borné. On trouve $x(\delta)$ qui soit le minimale de

$$F(u) = \left\|Au - y^{\delta}\right\|^{2} + \alpha\left\|u\right\|^{2},$$

pour tout $u \in H_1$. ainsi si $u \in H_1$ alors

$$F(x(\delta)) \leq F(u),$$

donc enparticulier

$$F(x(\delta)) \leq F(x).$$

mais on choisir $x(\delta)$ de telle sorte que $\left\|Ax(\delta) - y^{\delta}\right\| = \delta$ donc

$$F(x(\delta)) = \delta^{2} + \alpha\left\|x(\delta)\right\|^{2},$$

et on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \left\|Ax - y^{\delta}\right\|^{2} + \alpha\left\|x\right\|^{2} \\ &= \left\|y - y^{\delta}\right\|^{2} + \alpha\left\|x\right\|^{2} = \delta^{2} + \alpha\left\|x\right\|^{2}, \end{aligned}$$

à partir de la quelle nous conclure que

$$\left\|x(\delta)\right\| \leq \left\|x\right\|,$$

c-à-d $x(\delta)$ est borné.

On suppose que $\{y_n\}$ une suite converge vers y et que $\left\|y_n - y\right\| = \delta_n$. Chaque paire y_n, δ_n sera de déterminer $\alpha(\delta_n)$ et un correspondant $x_{\alpha}(\delta_n)$ que nous appellerons x_n . Nous allons maintenant montrer qu'il existe une suite de $\{\delta_n\}$ pour la quelle le x_n converge vers $x = A^{+}y$.

La suite $\{x_n\}$ se trouve dans la boule fermé de centre O et de rayon $\|x\|$ dans H_1. Et on a : dans un espace de Hilbert ; la boule fermé est faiblement compact. Donc, il existe une sous suite $\{x_n'\}$ de $\{x_n\}$ qui converge faiblement vers certain z, c-à-d. $x_n' \rightarrow z$. telque $\|z\| \leq \|x\|$. L'équation (3.4.9) montré que $\{x_n\} \subset R(A^*) \subset N(A)^{\perp}$. $N(A)^{\perp}$ est un sous espace fermé de H_1, donc il est aussi faiblement fermé .Ainsi $z \in N(A)^{\perp}$. Soit le paire y_n', δ_n' correspondant a x_n', alors

$$\left\|Ax_n' - y\right\| \leq \left\|Ax_n' - y_n'\right\| + \left\|y_n' - y\right\| \leq 2\delta_n' \rightarrow 0.$$

On a A un opérateur linéaire continu dans un espace de Hilbert est un opérateur faiblement continu.

La suite $\{x_n'\}$ est converge faiblement vers z alors la suite $\{Ax_n'\}$ converge faiblement vers Az mais $\{Ax_n'\}$ est converge fortement vers y, et donc converge faiblement vers y. La limite faible est unique donc $y = Az$. Ainsi $y = Az$ et $z \in N(A)^{\perp}$. Mais par la corollaire (17) l'élément unique avec ces propertiers est x. Ainsi $z = x$, et la suite $\{x_n'\}$ converge faiblement vers x c-à-d ; $x_n' \rightarrow x$. Nous maintenant montré qu'il existe une sous suite $\{x_n''\}$ de $\{x_n'\}$ qui converge fortement vers x. Pour montré que $x_n'' \Rightarrow x$ il suffit de montrer que $\|x_n''\| \rightarrow \|x\|$. On a $0 \leq \|x_n'\| \leq \|x\|$ donc $\{\|x_n'\|\}$ se situe dans l'ensemble compact $[0, \|x\|]$ de $\mathbb{R}$. donc il existe une sous suite de $\{x_n''\}$ de $\{x_n'\}$ telque $\|x_n''\| \rightarrow L$ et $0 \leq L \leq \|x\|$, et comme $x_n'' \rightarrow x$ on a

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \lim_{n\rightarrow\infty} \left\langle x_n'', x\right\rangle \leq \lim_{n\rightarrow\infty} \left\|x_n''\right\| . \|x\| \leq L. \|x\|$$

alors $L \geq \|x\|$ donc $L = \|x\|$, $\|x_n''\| \rightarrow \|x\|$, et donc $x_n'' \Rightarrow x$, et $x_n' \Rightarrow x$, et $x_n \Rightarrow x$

Nous conclure que le principe de Morozov fournir un schéma régulier pour résoudre l'équation $Ax = y$ lorsque A est un opérateur linéaire compact de H_1 dans H_2.

Bibliographie

[1] A. Kirsch, An introduction to the mathematical theory of inverse problems, Number 120 in applied mathematical sciences, Springer-Verlag, New-York, 1996.

[2] AKHIEZER N., GLAZMAN I. : [I], Theory of linear operators in Hilbert space, Pitman (1980).

[3] A. Lagarde (ed.) : IUTAM Symposium on Advanced Optical Methods and Applications in Solid Mechanics. Proceedings of the IUTAM Symposium held in Futuroscope, Poitiers, France, August 31-September 4, 1998. 2000 ISBN 0-7923-6604-2

[4] A.M. Linkov : Boundary Integral Equations in Elasticity Theory. 2002 ISBN 1-4020-0574-1.

[5] A. Preumont : Random Vibration and Spectral Analysis. 1994 ISBN 0-7923-3036-6

[6] B.L. Karihaloo (ed.) : IUTAM Symposium on Analytical and Computational Fracture Mechanics of Non-Homogeneous Materials. Proceedings of the IUTAM Symposium held in Cardiff, U.K., 18-22 June 2001. 2002 ISBN 1-4020-0510-5

[7] BAOUENDI M. S., GOULAOUIC C. : [1], Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Archive Rat. Mech. Anal., 34 (1969), p. 361-379.

[8] BERGER M. : [1], Geometry of the spectrum, in Differential Geometry, chern-Osserman ed, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 27, Part 2, Amer. Math. Soc. (1975), p. 129-152.

[9] D.A. Hills, P.A. Kelly, D.N. Dai and A.M. Korsunsky : Solution of Crack Problems. The Distributed Dislocation Technique. 1996 ISBN 0-7923-3848-0.

[10] D. Bestle and W. Schiehlen (eds.) : IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems Proceedings of the IUTAM Symposium held in Stuttgart, Germany. 1996 ISBN 0-7923-3830-8.

[11] D.E. Grierson, A. Franchi and P. Riva (eds.) : Progress in Structural Engineering. 1991 ISBN 0-7923-1396-8

[12] G. Prathap : The Finite Element Method in Structural Mechanics. 1993 ISBN 0-7923-2492-7

[13] J. Angeles and C.S. Lopez-Cajun : Optimization of Cam Mechanisms. 1991 ISBN 0-7923-1355-0

[14] J.F. Doyle : Static and Dynamic Analysis of Structures. With an Emphasis on Mechanics and Computer Matrix Methods. 1991 ISBN 0-7923-1124-8 ; Pb 0-7923-1208-2

[15] J. Herskovits (ed) : Advances in Structural Optimization. 1995 ISBN 0-7923-2510-9

[16] J.J. Kalker,Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. 1990 ISBN 0-7923-0712-7

[17] J.R. Vinson : The Behavior of Shells Composed of Isotropic and Composite Materials. 1993 ISBN 0-7923-2113-8

[18] L.P. Lebedev, I.I. Vorovich and G.M.L. Gladwell : Functional Analysis. Applications in Mechanics and Inverse Problems. 1996 ISBN 0-7923-3849-9

[19] M.H. Aliabadi and D.P. Rooke : Numerical Fracture Mechanics. ISBN 0-7923-1175-2

[20] P. Argoul, M. Fremond and Q.S. Nguyen (eds.) : IUTAM Symposium on Variations of Domains and Free-Boundary Problems in Solid Mechanics. Proceedings of the IUTAM Symposium held in Paris, France. 1999 ISBN 0-7923-5450-8

[21] P. Karasudhi : Foundations of Solid Mechanics. 1991 ISBN 0-7923-0772-0

[22] R.T. Haftka and Z. Giirdal : Elements of Structural Optimization. 3rd rev. and exp. ed. 1992 ISBN 0-7923-1504-9 ; Pb 0-7923-1505-7

[23] Yosida. K, Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[24] W. Ehlers (ed.) : IUTAM Symposium on Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials. Proceedings of the IUTAM Symposium held at the University of Stuttgart, Germany, September 5-10, 1999. 2001 ISBN 0-7923-6766-9

الملخص بالعربية

الهدف الرئيسي لهذه المذكرة هو دراسة مسألة مقلوبة سيئة الوضع حيث قمنا بالبحث عن الحل التقريبي للمسألة y =Ax في فضاءات هلبرتية و A مؤثر متراص.

و كذلك استعملنا طرق للبحث عن الحل التقريبي.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude d'un problème inverse mal posé. De plus nous avons cherché la solution approchée du problème Ax=y dans des éspaces de Hilbert avec A est un Opérateur compact, nous avons également utilisé des méthodes pour trouver la solution approchée.

Mots clés: opérateur compact, opérateur auto-adjoint, théorie spectrale.

Abstract

The principal objective of this memory is the study of ill posed inverse problem. we have researched on the approximation solution of the problem Ax=y in Hilbert space with A is a compact operator .we have also used the methods to find the approximation solution.