UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Département de Mathématiques

Mémoire de Fin D'etude

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine :Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Spécialité :Analyse fonctionnelle

Par

Saàdi somia

sujet

La multiplication ponctuelle dans les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin – Triebel

Encadreur: Aissa Djeriou

Promotion:2016/2017

Remerciment

Nous remercions en premier Dieu avoir donner la santé et pouvoir à fin de réaliser ce modeste travail

On tient a remercié nous ont l'ensemble du département de mathématiques surtout les enseignants pour quil fournit

durant tous nos années d'études.

Nous remercies monsieur Mr .DJERIOU AISSA ,pour bon encadrement de mémoire , son aideson encouragement.

En fin, nous remercies tous nos professeurs , et tous étudiants,qui m'ont Soutenu et encourage au cours da la réalise de ce travaille.

Soumia.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

Pour le printemps tendresse qui coule, qui est resté sur mon éducation et m'a apprisque la vie est une lutte pour une grande portée, à laquelle je regardai ma joie et crié à mon succès au premier mot prononcé par les lèvres de Dieusauvé ma mère bien-aimée

Pour qui a brûlé pour moid'ouvrir le chemin de la vie et qui insufflent le véritable amour du travail et de la patience et la force et la volonté, mon cher père que Dieu le protège

À tous les membres de ma famille, mes frères et sœurs

Pour ceux qui ont été crédités dans l'écriture de cette recherche

Pour ceux qui me connaissent et me aimé

Notations

- Tous les espaces dans ce mémoire sont définis sur $\mathbb{R}^n$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on pose $|\alpha| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ la dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée $\partial^\alpha f$, $f^{(\alpha)}$ ou $D^\alpha f$.
- Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction, alors le support de f est $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$.
- $f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$ est le produit du convolution des fonctions f et g.
- Soient A_1 et A_2 deux espace, on dit que $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $C > 0$, telle que:

$$\|.\|_{A_2} \leq C \|.\|_{A_1}$$

- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonction mesurables, intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, appelé espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{S}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq M} (1 + |x|)^M |\partial^\alpha f|, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

  Le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.

- Si $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ est sa partie entière.
- Pour $m \in \mathbb{N}$, $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions de classe $C^m(\mathbb{R}^n)$ dont toutes les dérivées sont bornées et

$$\|f\|_{C_b^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

- Pour $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $C^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hölder des fonction $f \in C^{[s]}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\|f\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{C_b^{[s]}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^{s-[s]}} < +\infty.$$

- H_p^s est l'espace de Bessel telle que :

$$\|f\|_{H_p^s} = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{f}(\xi)(x) \right\|_p \quad \left(s \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ 1 < p < \infty\right).$$

- $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev telle que:

$$W_p^m = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha f \in L_p, \qquad |\alpha| \le m\} \quad (m \in \mathbb{N},\ 1 < p < \infty)$$

- Pour $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ sa transformée Fourier est

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \widehat{f(\xi)} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

- L_p est l'espace des fonctions mesurables f telle que

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- ℓ_q est l'espace des suites $(x_n)_n$ telles que

$$\|(x_n)\|_{\ell_q} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Table des matières

Introduction

Plusieurs auteurs comme T.Runst et W.Sickel [7], J.Franke [5] et D. Drihem et M. Moussai $[3, Section 2]$ ont étudiés la multiplication ponctuelle dans les espaces de Sobolev H^s, Hölder $\mathcal{C}^s$, Besov $B^s_{p,q}$, Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}$ et autres. Ceci a une grande utilité dans le domaine des équations aux dérivée partielles.

Dans ce mémoire, nous allons étudier la multiplication ponctuelle dans les espaces de Besov et les espaces de Triebel-Lizorkin, on a déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres (s, s_0, s_1), (p, p_0, p_1), (q, q_0, q_1) pour que l'inclusion du type

$$A^{s_0,q_0}_{p_0} \times A^{s_1,q_1}_{p_1} \hookrightarrow A^{s,q}_p \text{ avec } A^{s,q}_p \equiv B^{s,q}_p \text{ ou } A^{s,q}_p \equiv F^{s,q}_p$$

soit vérifiées. Cela fait suite au travail de D. Drihem et M. Moussai $[4, Section 2]$.

Notre activité est organisée en trois chapitres:

- L'objectif de premier chapitre est de donner les concepts et outils de base, en utilisant:

1-Série de Littlewood-Paley. 2-Espace de Besov, Lizorkin-Triebel. 3-Quelques propositions et lemme .

- Dans le deuxième chapitre est basé sur l'étude de la multiplication ponctuelle du type $F.B \hookrightarrow F$ dans l'espace de Besov et l'espace de Lizorkin-Triebel pour $r < \frac{n}{p_2}$ et que vous avez besoin de concepts de base de chapitre précédente et aussi des définitions et des inégalités maximales
- Dans ce dernier chapitre on va déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres (s, p_1, p_2, q) pour que l'inclusion du type $F \cdot (B \cap L_\infty) \hookrightarrow F$ soit vérifiées.

Chapitre 1

préliminaires sur les espace de Besov

Dans ce chapitre nous rappelons les définitions essentielles utiliser par la suite à savoir particulier les espaces de Besov, Lizorkin-Triebel., quelques propriétés principales.

1.1 Série de Littlewood-Paley

1.1.1 La décomposition de Littlewood-Paley

Soient $\gamma \in$S$(\mathbb{R}^n)$ telle que:

1. $\operatorname{supp}\gamma \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$,
2. $\gamma(\xi) > 0$ pour $2^{-1} < |\xi| < 2$,
3. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma\left(2^{-k}\xi\right) = 1, \ \forall\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

On pose $\varphi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma\left(2^{-k}\xi\right)$, on obtient une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que:

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |\xi| \leq 2\} \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi \leq 1.$$

Alors, $\forall\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(\xi) + \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma\left(2^{-k}\xi\right) = 1. \tag{1.1.1}$$

La relation (1.1.1) est appelé la partition de l'unité .

A cette décomposition on associe une suite d'opérateurs de convolutions

$$Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\Delta_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

telle que

$$\begin{aligned}(Q_j f)(x) &= \left(\mathcal{F}^{-1}\left(\varphi\left(2^{-j}.\right)\right) * f\right)(x) \\ &= 2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\varphi\left(2^j(x-y)\right) f(y)\,dy \quad (j=1,2,\ldots)\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

et

$$\begin{aligned}(\Delta_k f)(x) &= \left(\mathcal{F}^{-1}\left(\gamma\left(2^{-k}.\right)\right) * f\right)(x) \\ &= 2^{kn}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^k(x-y)\right) f(y)\,dy \quad (k=0,1,\ldots)\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Avec la notation $\Delta_0 = Q_0$. alors

$$\widehat{Q_j f(\xi)} = \varphi\left(2^{-j}.\right)\widehat{f}(\xi) \;\; (\text{pour } j \geq 1) \qquad \text{et} \qquad \widehat{\Delta_k f(\xi)} = \gamma\left(2^{-k}.\right)\widehat{f}(\xi) \;\; (\text{pour } k \geq 0).$$

Ecrivons la relation (1.1.1) au point $2^{-j}\xi$, alors

$$\varphi\left(2^{-j}\xi\right) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \gamma\left(2^{-k}\xi\right) = 1.$$

En multipliant par $\widehat{f}$ on obtient

$$\varphi\left(2^{-j}\xi\right)\widehat{f} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \gamma\left(2^{-k}\xi\right)\widehat{f} = \widehat{f}. \tag{1.1.4}$$

En appliquant l'application $\mathcal{F}^{-1}$ sur (1.1.4), on obtient

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = f, \quad (\forall j \in \mathbb{N}). \tag{1.1.5}$$

Pour $j = 0$, on trouve

$$\varphi(\xi)\widehat{f} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma\left(2^{-k}\xi\right)\widehat{f} = \widehat{f},$$

i.e.

$$Q_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k f = f, \tag{1.1.6}$$

alors

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k f. \tag{1.1.7}$$

On remplaçant f dans (1.1.5), on obtient

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = \sum_{k=0}^{j} \Delta_k f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f.$$

Donc

$$Q_j f = \sum_{k=0}^{j} \Delta_k f.$$

La relation (1.1.7) est la décomposition de f du type de Littlewood-Paley.

Remarque 1.1.1 *Q_j et Δ_k sont des application linéaire i.e.*

1. $\Delta_k (f + \lambda g) = \Delta_k (f) + \lambda \Delta_k (g)$.

2. $Q_j (f + \lambda g) = Q_j (f) + \lambda Q_j (g)$.

Proposition 1.1.1 *Par l'inégalité de Young pour la convolution, il vient que les suites d'opérateurs $(Q_j)_{j\geq 0}$ et $(\Delta_j)_{j\geq 0}$ sont bornées uniformément dans $\mathcal{L}(L_p)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.*

Preuve. On a

$$(\Delta_j f)(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\left(\gamma\left(2^{-j}.\right)\right) * f\right)(x)$$

comme $\gamma \in C_0^{\infty}$, sa transformation de Fourier inverse appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et donc à L_1, le résulta est donc une conséquence de l'inégalité de Young:

$$\begin{aligned} \|\Delta_j f(x)\|_{L_p} &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\gamma * f\right\|_p \\ &\leq \left\|\mathcal{F}^{-1}\gamma\right\|_1 \|f\|_p \\ &\leq C_\gamma \|f\|_p. \end{aligned}$$

■

1.1.2 Décomposition du produit $f \cdot g$

Soient f et g deux fonctions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .On définit le produit $f \cdot g$ par :

$$f \cdot g = \lim_{j \to \infty} (Q_j f) . (Q_j g),$$

lorsque la limite existe dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(Voir $[7, Section 4.2]$) , alors en combinant (1.1.5) et (1.1.7) on trouve

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f \left(Q_j g + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k g \right), \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f . Q_j g + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k g \left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta_j f \right), \end{aligned}$$

donc

$$f \cdot g = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f . Q_j g + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k g . Q_{k-1} f, \tag{1.1.8}$$

où $\operatorname{supp} \mathcal{F}(\Delta_j f . Q_j g) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |\xi| < c 2^j\}$.

On a aussi

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k (f \cdot g) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \left(\sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f \sum_{\ell=0}^{\infty} \Delta_\ell g \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \Delta_k (\Delta_j f . \Delta_\ell g). \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\mathcal{F}(\Delta_k (\Delta_j f . \Delta_\ell g))$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta_k (\Delta_j f . \Delta_\ell g))(\xi) &= \gamma\left(2^{-k}\xi\right) [\mathcal{F}(\Delta_j f . \Delta_\ell g)](\xi) \\ &= \gamma\left(2^{-k}\xi\right) (\mathcal{F}(\Delta_j f) * \mathcal{F}(\Delta_\ell g))(\xi) \\ &= \gamma\left(2^{-k}\xi\right) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\Delta_j f)(\xi - \eta) \mathcal{F}(\Delta_\ell g)(\eta)\, d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma\left(2^{-k}\xi\right) \gamma\left(2^{-j}(\xi - \eta)\right) \gamma\left(2^{-\ell}\eta\right) \mathcal{F}(f)(\xi - \eta) \mathcal{F}(g)(\eta)\, d\eta. \end{aligned}$$

Donc, il ya trois cas où le support de $\mathcal{F}\left(\Delta_k\left(\Delta_j f.\Delta_\ell g\right)\right)$ n'est pas vide :

$$\begin{aligned}
&\ell \leq k+1 \quad \text{et} \quad k-2 \leq j \leq k+4,\\
&j \leq k+1 \quad \text{et} \quad k-2 \leq \ell \leq k+4,\\
&\ell, j \geq k \qquad \text{et} \quad |\ell-k| < 1.
\end{aligned}$$

Alors

$$\Delta_k\left(f\cdot g\right) = \sum_{j,\ell=0}^{\infty} \Delta_k\left(\Delta_j f.\Delta_\ell g\right) = \left(\Delta_{k(1)} + \Delta_{k(2)} + \Delta_{k(3)}\right)\left(f\cdot g\right), \tag{1.1.9}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Delta_{k(1)}\left(f\cdot g\right) &= \Delta_k\left(\widetilde{\Delta}_k f.Q_{k+1} g\right),\\
\Delta_{k(2)}\left(f\cdot g\right) &= \Delta_k\left(Q_{k+1} f.\widetilde{\Delta}_k g\right),\\
\Delta_{k(3)}\left(f\cdot g\right) &= \sum_{j=k}^{\infty} \Delta_k\left(\Delta_j f.\overline{\Delta}_j g\right),
\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

telle que

$$\widetilde{\Delta}_k = \sum_{j=k-2}^{k+4} \Delta_j \quad \text{et} \quad \overline{\Delta}_k = \sum_{j=k-1}^{k+1} \Delta_j.$$

1.2 Espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel

1.2.1 Espace de Besov

Définition 1.2.1 (L'espace $\ell_q^s\left(L_p\right)$) *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p,q \leq \infty$, $\left\{f_j\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'$ et* $\operatorname{supp}\widehat{f_j} \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |\xi| < c2^j\right\}$, *alors*

$$\left\|\left\{f_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_q^s(L_p)} = \left\|\left\{2^{js} f_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_q(L_p)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{js}\left\|f_j\right\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{1.2.1}$$

Définition 1.2.2 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et, $0 < p,q \leq \infty$. L'espace de Besov noté $B_{p,q}^s\left(\mathbb{R}^n\right)$ est l'ensemble de $f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ telle que* $\left(2^{js}\left\|\Delta_j f\right\|_p\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_q$

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \begin{cases} \left(\sum_{j\geq 0}(2^{js}\left\|\Delta_j f\right\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} & si \quad q \neq \infty. \\ \sup_{j\geq 0}\left(2^{js}\left\|\Delta_j f\right\|_p\right) & si \quad q = \infty. \end{cases}$$

Exemple 1.2.1 $\big($*δ est une mesure de Dirac,* *$vp\left(\frac{1}{x}\right)$ la valeur principale de $\frac{1}{x}$*$\big)$

1. $f(x) = \delta \in B^s_{p,q}$ *si* $s < n\left(\frac{1}{p} - 1\right)$.

2. $f(x) = vp\left(\frac{1}{x}\right) \in B^s_{p,q}$ *si* $s < \frac{1}{p} - 1$.

Proposition 1.2.1 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et, $0 < p, q \leq \infty$ telle que :*

1. $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un espace quasi-Banach (Banach si $\min(p,q) \geq 1$).

2. $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = C^s(\mathbb{R}^n)$ si $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, ($C^s$ est l'espace de Hölder).

Preuve. Voir [7] ■

Proposition 1.2.2 *Soient $s_0, s_1, s \in \mathbb{R}$, $0 < p_0, p, p_1, q_0, q_1, q \leq \infty$ telle que :*

1. $B^{s_0}_{p,q_0} \hookrightarrow B^{s_1}_{p,q_1}$ si $s_0 > s_1$.

2. $B^s_{p,q_0} \hookrightarrow B^s_{p,q_1}$ si $q_0 \leq q_1$.

3. $B^{s_0}_{p_0,q_0} \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,q_1}$ si $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ et $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$.

Preuve. Voir [7] ■

1.2.2 Espace de Lizorkin-Triebel

Définition 1.2.3 (L'espace $L_p\left(\ell^s_q\right)$) *Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'$ et* $\operatorname{supp} \widehat{f_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |\xi| < c2^j\}$, *alors*

$$\left\|\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{L_p\left(\ell^s_q\right)} = \left\|\left\{2^{js} f_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{L_p(\ell_q)} = \left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{js}|f_j|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p < \infty. \tag{1.2.2}$$

Définition 1.2.4 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$, l'espace de Lizorkin-Triebel noté est $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\|f\|_{F^s_{p,q}} = \begin{cases} \left\|\left(\sum_{j\geq 0}\left(2^{js}|\Delta_j f|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p & si \quad q \neq \infty. \\ \left\|\sup_{j\geq 0} 2^{js}|\Delta_j f|\right\|_p & si \quad q = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.2.3 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < q \leq \infty$, telle que :*

1. $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un espace quasi Banach (espace de Banach si $\min(p,q) \geq 1$)
2. $F^0_{p,2}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ si $1 < p < \infty$.
3. $F^m_{p,2}(\mathbb{R}^n) = W^m_p(\mathbb{R}^n)$ si $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}^*$.
4. $F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_p(\mathbb{R}^n)$ si $1 < p < \infty$.
5. $F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p < \infty$.

Preuve. Voir ([5]) ■

Proposition 1.2.4 *Soient* $s_0, s_1, s \in \mathbb{R}$ *et* $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $0 < p_0, p_1, p < \infty$ *telle que :*

1. $F^{s_0}_{p,q_0} \hookrightarrow F^{s_1}_{p,q_1}$ si $s_0 > s_1$.
2. $F^s_{p,q_0} \hookrightarrow F^s_{p,q_1}$ si $q_0 \leq q_1$.
3. $F^{s_0}_{p_0,q_0} \hookrightarrow F^{s_1}_{p_1,q_1}$ si $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ et $0 < p_0 < p_1 < \infty$.

Preuve. Voir [7] ■

1.2.3 La multiplication dans une algèbre

Définition 1.2.5 *On dit qu'un espace vectoriel* E *est une algèbre si il existe une constante* $c > 0$, *telle que*

$$\|f \cdot g\|_E \leq C \|f\|_E \cdot \|g\|_E, \forall (f,g) \in E \times E$$

Théorème 1.2.1 *Soient* $s \in \mathbb{R}$ *et* $0 < q \leq \infty$

1. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes telle que $0 < p \leq \infty$

(i) $B^s_{p,q}$ est une algèbre,

(ii) $B^s_{p,q} \hookrightarrow L_\infty$,

(iii) $s > \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $0 < q \leq 1$.

2. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes telle que $0 < p < \infty$

(i) $F^s_{p,q}$ est une algèbre,

(ii) $F^s_{p,q} \hookrightarrow L_\infty$

(iii) $s > \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $0 < q \leq 1$.

Remarque 1.2.1 *Dans le cas $s = 0$, on a*

1. $F^0_{p,q} \cdot F^0_{p,q} \nsubseteq F^0_{p,q}$.
2. $B^0_{p,q} \cdot B^0_{p,q} \nsubseteq B^0_{p,q}$.

Preuve. pour la preuve du théorème 1.2.1 et la remarque 1.2.1 voir [5] ■

Lemme 1.2.1 *[7]*

1. Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$ alors
$$B^s_{p,q_0} \hookrightarrow F^s_{p,q} \hookrightarrow B^s_{p,q_1} \text{ si } q_0 \leq \min(p,q), q_1 \geq \max(p,q).$$
2. Soient $0 < p_0 < p < p_1 \leq \infty$. et $s_0 - \frac{n}{p_0} = s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ alors
$$B^{s_0}_{p_0,q_0} \hookrightarrow F^s_{p,q} \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,q_1} \text{ si } 0 < q_0 \leq p \leq q_1 \leq \infty.$$
3. Soient $0 < p < p_1 \leq \infty$ et $s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$, alors
$$F^s_{p,q} \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,q}$$

1.3 Inégalités de base

Théorème 1.3.1 (Riesz-Thorin) *Soient (X,μ), (Y,ϑ) deux espaces mesurés et, $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$, avec $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$. On suppose que T est un opérateur linéaire qui envoi $L_{p_0}(X,\mu)$ dans $L_{q_0}(Y,\vartheta)$ et $L_{p_1}(X,\mu)$ dans $L_{q_1}(Y,\vartheta)$ tel que, pour toute fonction simple f :*

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{q_0} &\leq M_0 \|f\|_{p_0}, \\ \|T(f)\|_{q_1} &\leq M_1 \|f\|_{p_1}. \end{aligned}$$

Alors T renvoie $(L_{p_0}, L_{p_1})_\theta = L_p$ dans $(L_{q_0}, L_{q_1})_\theta = L_q$ tels que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, (0 < \theta < 1)$$

de plus

$$\|T(f)\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p .$$

Preuve. Voir [1] ■

Théorème 1.3.2 (Inégalité de Hölder) .

Soient $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$, alors $f \cdot g \in L_r$ et

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}\right).$$

Théorème 1.3.3 (Inégalité de Minskovski) .

pour tout $1 \leq p \leq q \leq \infty$, et X un élément dans $\ell_p(\ell_q)$, alors

$$\|X\|_{\ell_q(\ell_p)} \leq \|X\|_{\ell_p(\ell_q)} .$$

Théorème 1.3.4 (Inégalité de Young) .

Soient $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ telle que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors pour toute $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$, on a $f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Preuve. On fixe $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ et on considère l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} T_g : & L_p & \rightarrow & L_r \\ & f & \rightarrow & T_g f = f * g \end{array}$$

On a

$$T_g f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) \, dy,$$

telle que

1) $T_g : L_{q'} \rightarrow L_\infty$ avec $\|T_g f\|_\infty \leq \|g\|_q \|f\|_{q'}$ et $1 < q < \infty$

Car

$$|T_g f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y) f(y)| \, dy.$$

D'après l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
|T_g f(x)| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{q'} \, dy \right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq \|g(x-y)\|_q \, \|f(y)\|_{q'}
\end{aligned}$$

Alors

$$\|T_g f\|_\infty \leq \|g\|_q \, \|f\|_{q'} \text{ puis que } \|g(\cdot - y)\|_q = \|g\|_q$$

2) $T_g : L_1 \to L_q$ avec $\|T_g f\|_q \leq \|g\|_q \, \|f\|_1$

Car

$$\begin{aligned}
\|T_g f(x)\|_q &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |T_g f(x)|^q \, dx \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup \left| \int_{\|h\|_{q'} \leq 1} T_g f(x) \, h(x) \, dx \right|
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\|h\|_{q'} \leq 1} T_g f(x) \, h(x) \, dx \right| &= \left| \int_{\|h\|_{q'} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) \, dy h(x) \, dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\|h\|_{q'} \leq 1} |g(x-y)| \, |h(x)| \, dx dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, \|g(\cdot - y)\|_q \, \|h\|_{q'} \, dy
\end{aligned}$$

puis que $\|g(\cdot - y)\|_q = \|g\|_q$ et $\|h\|_{q'} \leq 1$, alors

$$\|T_g f\|_q \leq \|g\|_q \, \|f\|_1 .$$

On a

$$\begin{aligned}
T_g &: L_1(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n) \\
T_g &: L_{q'}(\mathbb{R}^n) \to L_\infty(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

Par le théorème du Riesz alors

$$T_g : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_r(\mathbb{R}^n), \quad \text{avec} \quad \|T_g f\|_r = \|f * g\|_r \leq \|g\|_q^{1-\theta} \|g\|_q^{\theta} \|f\|_p$$

et

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

car $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{q'} + \dfrac{\theta}{1}, \dfrac{1}{r} = \dfrac{1-\theta}{\infty} + \dfrac{\theta}{q} = \dfrac{\theta}{q}$, alors $\dfrac{1}{p} = (1-\theta)\left(1 - \dfrac{1}{q}\right) + \theta = \dfrac{\theta}{q} - \dfrac{1}{q} + 1 = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{q} + 1.$

■

Lemme 1.3.1 *Soient $0 < b < 1$ et $0 < q \leq \infty$. Pour toute suite réele à termes positifs $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\ell_q(\mathbb{N})$, les suites $\left\{\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left\{\sum_{j=k}^{\infty} b^{j-k}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\ell_q(\mathbb{N})$. De plus, il existe une constante $c = c(a,q) > 0$ telle que*

$$\left\|\left\{\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_q} + \left\|\left\{\sum_{j=k}^{\infty} b^{j-k}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_q} \leq c \left\|\{\varepsilon_k\}_{k\,\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_q}. \tag{1.3.1}$$

La valeur existe de c est : $\left(\frac{1}{1-b}\right)$.

Preuve. Pour $1 \leq q \leq \infty$, on a

$$\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j = \sum_{j=0}^{k} b^{\frac{(k-j)}{q}}\varepsilon_j b^{\frac{(k-j)}{q'}} . \text{où } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\left(\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right)^q \leq \left(\sum_{j=0}^{k} b^{(k-j)}\varepsilon_j^q\right)\left(\sum_{j=0}^{k} b^{(k-j)}\right)^{\frac{q}{q'}}.$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right)^q &\leq \left(\sum_{i=0}^{N} b^i\right)^{\frac{q}{q'}} \left(\sum_{j=0}^{N}\varepsilon_j^q \sum_{k=j}^{N} b^{(k-j)}\right) \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{N} b^i\right)^q \left(\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j^q\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\|\left\{\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_q} \leq c \left\|\{\varepsilon_k\}_{k\,\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_q}.$$

Pour $0 < q < 1$, on a

$$\left(\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right)^q \leq \sum_{j=0}^{k} b^{(k-j)q}\varepsilon_j^q,$$

ce qui implique

$$\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right)^q \leq \left(\sum_{j=0}^{N}\varepsilon_j^q \sum_{k=j}^{N} b^{(k-j)q}\right).$$

Par conséquent

$$\left\|\left\{\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_q} \leq c\left(\frac{1}{1-b^q}\right)^{\frac{1}{q}} \left\|\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_q}.$$

De même pour $\left\{\sum_{j=k}^{\infty} b^{j-k}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ce qui prouve (1.3.1). ■

Lemme 1.3.2 *Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, alors pour tout $N > 0$, on a*

$$(1+|z-y|)^{-N} \leq (1+|z-x|)^{-N}(1+|x-y|)^N$$

Proposition 1.3.1

Soient $0 < p \leq \infty$. Soient $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ une suite de fonctions telle que le support de $\widehat{f_j}$ est dans la boule $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |\xi| \leq c2^j\}$. Alors

$$|f_j(x)| \leq 2^{\frac{nj}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+2^j|x-y|\right)^{-Np}|f_j(x)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p, L > 0..$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ tel que $\varphi = 1$ sur le support de $\widehat{f_j}$.

Donc

$$\widehat{f_j} = \varphi\left(2^{-j}.\right)\widehat{f_j}$$

On applique la Transformation de Fourier inverse on obtient :

$$|f_j(x)| = 2^{jn}\left|\mathcal{F}^{-1}\varphi\left(2^j.\right) * f\right| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

1) le cas $1 < p \leq \infty$,On peut majorer la fonction $|f_j(x)|$ par

$$2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\mathcal{F}^{-1}\varphi(2^j(x-y))|}{(1+2^j|x-y|)^{-N}}\frac{|f_j(y)|}{(1+2^j|x-y|)^N}dy$$

par l'inégalité de Hölder on trouve

$$\begin{aligned}
|f_j(x)| &\leq 2^{jn}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_j(y)|^p}{(1+2^j|x-y|)^{Np}}dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\mathcal{F}^{-1}\varphi(2^j(x-y))|^{p'}}{(1+2^j|x-y|)^{-Np'}}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq 2^{jn}2^{-j\frac{n}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_j(y)|^p}{(1+2^j|x-y|)^{Np}}dy\right)^{\frac{1}{p}}\left\|(1+|.|)^N\mathcal{F}^{-1}\varphi\right\|_{p'}
\end{aligned}$$

donc

$$|f_j(x)|\leq c2^{jn}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_j(y)|^p}{(1+2^j|x-y|)^{Np}}dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

le cas $0<p<1$.On pose

$$f_j^{*,N}(x)=\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\frac{|f_j(z)|}{(1+2^j|z-x|)^N}.$$

Comme $\mathcal{F}^{-1}\psi\in\mathcal{S}$, alors il existe une constante $c>0$, telle que :

$$\left|\mathcal{F}^{-1}\psi\left(2^j(z-y)\right)\right|\leq c\left(1+2^j|z-y|\right)^{-N}\qquad\forall N\geq 0,\forall z,y\in\mathbb{R}^n$$

et par suite

$$|f_j(z)|\leq c2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+2^j|z-y|\right)^{-N}|f_j(y)|\,dy$$

d'après le lemme 1.3.2

$$\left(1+2^j|z-y|\right)^{-N}\leq\left(1+2^j|z-x|\right)^N\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N},$$

Alors on peut majorer $\frac{|f_l(z)|}{(1+2^j|z-x|)^N}$ comme suite

$$\begin{aligned}
\frac{|f_l(z)|}{(1+2^j|z-x|)^N} &\leq c2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N}|f_j(y)|\,dy\\
&= c2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N}|f_j(y)|^{1-p}|f_j(y)|^p\,dy.
\end{aligned}$$

Prenons le sup de les cotés sur $z\in\mathbb{R}^n$ on obtient :

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\frac{|f_l(z)|}{(1+2^j|z-x|)^N}\leq c2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N}|f_j(y)|^{1-p}|f_j(y)|^p\,dy.$$

Donc

$$\begin{aligned} f_j^{*,N}(x) &\leq c2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N}|f_j(y)|^{1-p}|f_j(y)|^p\,dy \\ &\leq c2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N}|f_j(y)|\right)^{1-p}\left(1+2^j|x-y|\right)^{-Np}|f_j(y)|^p\,dy \\ &\leq c\left(f_j^{*,N}(x)\right)^{1-p}2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+2^j|x-y|\right)^{-Np}|f_j(y)|^p\,dy, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left(f_j^{*,N}(x)\right)^p \leq c2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+2^j|x-y|\right)^{-Np}|f_j(y)|^p\,dy,$$

mais

$$f_j(x) \leq cf_j^{*,N}(x),$$

donc le résultat. ■

Lemme 1.3.3

Soient $0<p\leq\infty$, $y>0$. Pour toute suite $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\cap L_p$, telle que

$$\operatorname{supp}\widehat{f_j}\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}^n:\ \ |\xi|\leq y2^j\right\},$$

alors

$$\|\Delta_k f_j\|_p \leq c2^{(j-k)\varrho}\|f_j\|_p. \tag{1.3.2}$$

Avec $k\leq j<\infty$ et $\varrho=\max\left(0,\frac{n}{p}-n\right)$, avec c dépend de n, p et y

Preuve. On a

$$\begin{aligned} |\Delta_k f_j(x)| &= \left|\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^{-k}\xi\right)*f\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}2^{kn}\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^k(x-y)\right)f(y)\,dy\right| \\ &\leq 2^{kn}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^k(x-y)\right)\right||f(y)|\,dy \\ &\leq c2^{kn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+2^k|x-y|\right)^{-N}|f_j(y)|\,dy. \end{aligned}$$

Si $1\leq p\leq\infty$, en appliquant l'inégalité de Hölder, on a

$$|f_j(y)|\leq 2^{\frac{jn}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+2^j|y-z|\right)^{-Lp}|f_j(z)|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}},\qquad p,L>0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\Delta_k f_j(x)| &\leq 2^{kn+\frac{jn}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+2^k|x-y|\right)^{-N} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+2^j|y-z|\right)^{-Lp} |f_j(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{P}} dy \\
&= 2^{kn+\frac{jn}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+2^k|x-z|\right)^{-Np} \left(1+2^j\ |y-z|\right)^{-Lp} |f_j(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} dy\right)^{\frac{p}{p}}
\end{aligned}$$

On sait que $\frac{1}{p}<1$, par l'inégalité de Minskovski, la dernière formule est majorée par

$$\begin{aligned}
&2^{kn+\frac{jn}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+2^k|x-z|\right)^{-N} \left(1+2^j|y-z|\right)^{-L} |f_j(z)|\, dy\right)^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \\
= \ &2^{kn+\frac{jn}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(z)|^p \left(1+2^k|x-z|\right)^{-N_p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+2^j|y-z|\right)^{-L} dy\right)^p dz\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

On pose $2^j|y-z|=h \Rightarrow dy=2^{-jn}dh$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+2^j|y-z|\right)^{-L} dy = 2^{-jn}\int_{\mathbb{R}^n} (1+h)^{-L} dh = c2^{-jn}$$

On a

$$|\Delta_k f_j(x)| \leq c' 2^{kn+j\frac{n}{p}-jn} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(z)|^p \left(1+2^k|x-z|\right)^{-Np} dz\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|\Delta_k f_j\|_p &\leq c' 2^{kn+j\left(\frac{n}{p}-n\right)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(z)|^p \left(1+2^k|x-z|\right)^{-Np} dz\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c' 2^{kn+j\left(\frac{n}{p}-n\right)} \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(z)|^p \left(1+2^k|x-z|\right)^{-N} dz dx\right)^{\frac{1}{P}} \\
&\leq c 2^{(k-j)\left(n-\frac{n}{p}\right)} \|f_j\|_p .
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.3.4 *Soient* $0<p<1$ *et* $y>0$, *pour toute suite* $\{f_j\}\subset L_p$, *telle que*

$$\operatorname{supp} \widehat{f_j} \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq y2^j\right\},$$

alors

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} f_j\right\|_{B^{\varrho}_{p,\infty}} \leq c \left\|\left\{2^{j\varrho} f_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{L_p(\ell_\infty)}. \tag{1.12}$$

Avec $\varrho=\frac{n}{p}-n$, avec c dépend de n, p et y

Preuve. Voir $[6, lemma3]$ ■

Chapitre 2

La multiplication ponctuelle du type $F.B \hookrightarrow F$

Dans ce chapitre nous étudions la multiplication ponctuelle dans les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, et on a donner quelque définitions et quelque propositions.

2.1 Rappel

Définition 2.1.1 *Soient A_0, A_1 et A_2 trois espace de Banach, On dit que $A_0.A_1 \hookrightarrow A_2$ si pour toute fonction f appartient à A_0 et g appartient à A_1 on a $f.g$ appartient à A_2 de plus il existe $c > 0$ telle que*

$$\|f.g\|_{A_2} \leq \|f\|_{A_0} \|g\|_{A_1}.$$

Nous rappelons la définition de la fonction maximale :

Définition 2.1.2 *A toute fonction localement intégrable f sur $\mathbb{R}^n$, on associe sa fonction maximale définie par*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy,$$

où $B(x,r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r.

Proposition 2.1.1

Soient $1 < p < \infty$ et , Alors, il existe une constante $c = c(n,p) > 0$ telle que pour tout $g \in L_p$ on a

$$\|Mg\|_p \leq c\,\|g\|_p\,.$$

Preuve. Voir par exemple [9]. ■

Proposition 2.1.2

Soient $0 < t, b < \infty$ et f une fonction telle que $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |\xi| \leq b\}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^{\frac{n}{t}}} \leq c\left(M\,|f|^t(x)\right)^{\frac{1}{t}}$$

Preuve. Voir [8, Théoreme1.31] ■

Définition 2.1.3

Soient $f \in \mathcal{S}'$ et $a > 0$. On définit les opérateurs maximaux associés aux Δ_k et Q_k par :

$$\Delta_k^{*,a} f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_k f(x-y)|}{1+(2^k\,|y|)^a} \quad et \quad Q_k^{*,a} f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|Q_k f(x-y)|}{1+(2^k\,|y|)^a}$$

Remarque 2.1.1 *Soient la fonction de Fefferman-Stein qui définit par*

$$\left(\Delta_k^{*,a} f\right)(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_k f(x-y)|}{1+(2^k\,|y|)^a}, \qquad (x \in \mathbb{R}^n \ \textit{et}\ k = 0,1,2,\ldots)$$

(1) Pour tout $a > \frac{n}{\min(p,q)}$, on a

$$\left\|2^{ks}\Delta_k^{*,a} f\right\|_{L_p(\ell_q)} \backsim \|f\|_{F^s_{p,q}}$$

(2) Pour tout $a > \frac{n}{p}$, on a

$$\left\|2^{ks}\Delta_k^{*,a} f\right\|_{\ell_q(L_p)} \backsim \|f\|_{B^s_{p,q}}$$

Preuve. voir [10] et [11, Théorème 2.3.2] ■

Lemme 2.1.1

Soient $0 < p < \infty$ et $a > \frac{n}{p}$. Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left\| Q_j^{*,a} g \right\|_{L_p(\ell_\infty)} \leq c \left\| g \right\|_{F^0_{p,2}}, \tag{1.14}$$

pour toute $g \in F^0_{p,2}$.

Preuve. La preuve de cette lemme n'est pas compliqué. Il suffit de prendre $t > 0$ telle que $\frac{n}{a} < t < p$, la proposition 2.1.2 donne l'existence d'une constante c, indépendant de j, telle que

$$Q_j^{*,a} g(x) \leq Q_j^{*,\frac{n}{t}} g(x) \leq c \left(\left(M \left| Q_j g \right|^t \right)(x) \right)^{\frac{1}{t}} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,a} g(x) \right\|_{L_p} &\leq \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,\frac{n}{t}} g(x) \right\|_{L_p} \\
&\leq c_1 \left\| \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} M \left| Q_j g(x) \right|^t \right)^{\frac{1}{t}} \right\|_{L_p} \\
&= c_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\sup_{j \in \mathbb{N}} M \left| Q_j g(x) \right|^t \right)^{\frac{1}{t}} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} M \left| Q_j g(x) \right|^t \right\|_{L_{\frac{p}{t}}}^{\frac{1}{t}}
\end{aligned}$$

On applique la proposition 2.1.1, on obtient

$$\left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} M \left| Q_j g(x) \right|^t \right\|_{L_{\frac{p}{t}}}^{\frac{1}{t}} \leq c_2 \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} \left| Q_j g \right|^t \right\|_{L_{\frac{p}{t}}}^{\frac{1}{t}}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^{*,a} g(x) \right\|_{L_p} &\leq c \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} \left| Q_j g \right|^t \right\|_{L_{\frac{p}{t}}}^{\frac{1}{t}} \\
&= c \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} \left| Q_j g \right| \right\|_{L_p} = c \left\| g \right\|_{F^0_{p,\infty}} \\
&\leq c \left\| g \right\|_{F^0_{p,2}} \quad \text{puis que } \left(F^s_{p,q_1} \hookrightarrow F^s_{p,q_2} \text{ si } q_1 \leq q_2 \right)
\end{aligned}$$

■

2.2 Multiplication du type $F.B \hookrightarrow F$

Théorème 2.2.1 *[4] Soient* $0 < p, p_1, p_2 < \infty$, $0 < q, q_2 \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, *et* $r > 0$ *telle que*

$$-r + \max\left(0, \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} - n\right) < s < \min\left(\frac{n}{p_1}, r\right), \tag{2.2.1}$$

et

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n}, \qquad \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n}, \qquad r < \frac{n}{p_2}. \tag{2.2.2}$$

Alors

$$F^s_{p_1,q} \cdot B^r_{p_2,q_2} \hookrightarrow F^s_{p,q}$$

Preuve. Soient $f \in F^s_{p_1,q}$ et $g \in B^r_{p_2,q_2}$. D'après la décomposition de $f.g$, on obtient

$$f.g = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k (f.g).$$

On calcule $f.g$ en norme de $F^s_{p,q}$ et d'après le lemme 1.3.4 on trouve

$$\|f.g\|_{F^s_{p,q}} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{k(i)} (f.g) \right\|_{F^s_{p,q}} \leq c \left\| \left\{ 2^{ks} \Delta_{k(i)} (f.g) \right\} \right\|_{L_p(\ell_q)}$$

On estime respectivement $\Delta_{k(1)}(f.g)$, $\Delta_{k(2)}(f.g)$ et $\Delta_{k(3)}(f.g)$ en norme de $L_p\left(\ell^s_q\right)$

(i) **Estimation de $\Delta_{k(1)}(f.g)$**

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_{k(1)} (f.g)(x)\right| &= \left|\Delta_k \left(Q_{k+1} g.\widetilde{\Delta_k} f\right)(x)\right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} 2^{kn} \mathcal{F}^{-1}\gamma \left(2^k y\right) \left(Q_{k+1} g.\widetilde{\Delta_k} f\right)(x-y)\, dy \right| \\
&\leq c' \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}^{-1}\gamma \left(2^k y\right)\right| \left|Q_{k+1} g (x-y)\right| \left|\widetilde{\Delta_k} f (x-y)\right| dy \\
&\leq c' \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \left(2^k |y|\right)^{a_1}\right) \left(1 + \left(2^k |y|\right)^{a_2}\right) \left|\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^k y\right)\right| \frac{\left|Q_{k+1} g(x-y)\right|}{\left(1 + \left(2^k |y|\right)^{a_1}\right)} \frac{\left|\widetilde{\Delta_k} f (x-y)\right|}{\left(1 + \left(2^k |y|\right)^{a_2}\right)} dy \\
&\leq c' \left(Q^{*,a_1}_{k+1} g\right) \left(\widetilde{\Delta}^{*,a_2}_k f\right) \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \left(2^k |y|\right)^{a_1}\right) \left(1 + \left(2^k |y|\right)^{a_2}\right) \left|\mathcal{F}^{-1}\gamma \left(2^k y\right)\right| dy \\
&\leq c \left(Q^{*,a_1}_{k+1} g\right) \left(\widetilde{\Delta}^{*,a_2}_k f\right)
\end{aligned}$$

où $Q_{k+1}^{*,a_1} g$ et $\widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f$ sont définie comme dans la remarque 2.1.1.

Alors

$$\left|\Delta_{k(1)}(f.g)\right| \leq c\left(\sup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g\right)\left(\widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f\right).$$

Donc

$$2^{ks}\left|\Delta_{k(1)}(f.g)\right| \leq c\left(\sup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g\right)\left(2^{ks}\widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f\right)$$

ce qui implique :

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{ks}\left|\Delta_{k(1)}(f.g)\right|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\sup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{ks}\widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Alors

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{\ell_q} \leq c\left(\sup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g\right)\left\|2^{ks}\widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f\right\|_{\ell_q}. \tag{2.2.3}$$

On prend la relation (2.2.3) en norme de L_p, alors

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{L_p(\ell_q)} \leq c\left\|\sup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g\left\|2^{ks}\widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f\right\|_{\ell_q}\right\|_{L_p}. \tag{2.2.4}$$

D'après la relation (2.2.2), on pose $\frac{1}{b} = \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n}$, alors $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{b}$, nous appliquons dans la relation (2.2.4), nous trouve

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{L_p(\ell_q)} \leq c\left\|\sup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^{*,a_1} g\right\|_{L_b}\left\|2^{ks}\widetilde{\Delta}_k^{*,a_2} f\right\|_{L_{p_1}(\ell_q)}.$$

Choisissons $a_1 > \frac{n}{b}$ et $a_2 > \frac{n}{\min(p_1,q)}$ d'après le lemme 2.1.1 et la remarque 2.1.1 on a

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{L_p(\ell_q)} \leq c\left\|g\right\|_{F_{b,2}^0}\left\|f\right\|_{F_{p_1,q}^s}. \tag{2.2.5}$$

Nous avons aussi $\frac{1}{b} = \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n} \Rightarrow r - \frac{n}{p_2} = 0 - \frac{n}{b}$ et $q_2 \leq \frac{n}{\frac{n}{p_2} - r} = b$, alors d'après le lemme 1.2.1/(2), on a

$$B_{p_2,q_2}^r \hookrightarrow F_{b,2}^0 \text{ i.e. } \left\|g\right\|_{F_{b,2}^0} \leq \left\|g\right\|_{B_{p_2,q_2}^r}.$$

Alors, la relation (2.2.5) devient

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{L_p(\ell_q)} \leq c\left\|g\right\|_{B_{p_2,q_2}^r}\left\|f\right\|_{F_{p_1,q}^s}.$$

(ii) **Estimation de** $\Delta_{k(2)}(f.g)$

Soient σ, β, u et v telle que

$$\max\left(0, \frac{1}{p_1} - \frac{r}{n}\right) < \frac{1}{u} < \min\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_1} - \frac{s}{n}\right) \tag{2.2.6}$$

et

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u}, \quad \sigma = s - \frac{n}{p} + \frac{n}{v}, \quad \beta = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{u}. \tag{2.2.7}$$

D'après le lemme 1.3.3 on a

$$\begin{aligned} \left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_v &= \left\|\Delta_k\left(Q_{k+1}f.\widetilde{\Delta}_k g\right)\right\|_v \\ &\leq c\left\|Q_{k+1}f.\widetilde{\Delta}_k g\right\|_v, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder, $\left(\frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u}\right)$, alors

$$\begin{aligned} \left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_v &\leq c\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\left\|Q_{k+1}f\right\|_u \\ &= c\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\left\|\sum_{j=0}^{k+1}\Delta_j f\right\|_u \\ &\leq c\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\sum_{j=0}^{k+1}\left\|\Delta_j f\right\|_u. \end{aligned}$$

Donc

$$2^{k\sigma}\left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_v \leq c2^{k\sigma}\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\sum_{j=0}^{k+1}\left\|\Delta_j f\right\|_u \tag{2.2.8}$$

ce qui implique :

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{k\sigma}\left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_v\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{k\sigma}\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\sum_{j=0}^{k+1}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

alors

$$\begin{aligned} \left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\ell_p(L_v)} &\leq c\left\|2^{k\sigma}\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\sum_{j=0}^{k+1}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right\|_{\ell_p} \\ &\leq c\left\|2^{kr}\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\left(2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right)\right)\right\|_{\ell_p}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.3.1 $\left(\text{puis que } s < \frac{n}{p_1} \Rightarrow \beta < 0\right)$ on a

$$\left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\ell_p(L_v)} \leq c\left\|\left(2^{kr}\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\right)\left(2^{j\beta}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right)\right\|_{\ell_p}. \tag{2.2.9}$$

On pose $\frac{1}{\widetilde{q}_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}$, après leur application dans la relation (2.2.9), nous trouvons

$$\begin{aligned} \left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\ell_p(L_v)} &\leq c\left\|2^{kr}\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\right\|_{\ell_{\widetilde{q}_2}}\left\|2^{j\beta}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right\|_{\ell_{p_1}} \\ &= c\left\|g\right\|_{B^r_{p_2,\widetilde{q}_2}}\left\|f\right\|_{B^\beta_{u,p_1}} \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Alors nous avons aussi $\beta = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{u} \Rightarrow s - \frac{n}{p_1} = \beta - \frac{n}{u}$, alors d'après le lemme 1.2.1, on a

$$F^s_{p_1,q} \hookrightarrow B^\beta_{u,p_1}, \tag{2.2.11}$$

avec $\frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{\widetilde{q}_2} \Rightarrow \widetilde{q}_2 \leq q_2$, alors d'après la proposition 1.2.2, on a

$$B^r_{p_2,q_2} \hookrightarrow B^r_{p_2,\widetilde{q}_2} \tag{2.2.12}$$

et

$$\text{puis que } \sigma > s \text{ et } v < p_1 \Rightarrow \ell^\sigma_{p_1}(L_v) \hookrightarrow L_{p_1}\left(\ell^s_q\right). \tag{2.2.13}$$

Alors la relation (2.2.10) devient

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{L_p(\ell_q)} \leq c\left\|g\right\|_{B^r_{p_2,q_2}}\left\|f\right\|_{F^s_{p_1,q}}$$

(iii)**Estimation de $\Delta_{k(3)}(f.g)$**

- **Etudier le cas $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1$**

  Soient σ, β, u et v telle que

$$\max\left(0, \frac{1}{p_1} - \frac{r}{n}, \frac{1}{p_1} - \frac{r+s}{n}\right) < \frac{1}{u} < \frac{1}{p_1} \tag{2.2.14}$$

et la relation (2.2.7), comme $\rho = \max\left(0, \frac{n}{v} - n\right) = 0$ puis que $\frac{n}{v} - n = (\frac{n}{p_2} + \frac{n}{u}) - n < \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1} - n \leq 0$, alors d'après le lemme 1.3.3 on a

$$\begin{aligned} \left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v &= \left\|\sum_{j=k}^{\infty}\Delta_k\left(\Delta_j f.\overline{\Delta}_j g\right)\right\|_v \\ &\leq \sum_{j=k}^{\infty}\left\|\Delta_k\left(\Delta_j f.\overline{\Delta}_k g\right)\right\|_v \\ &\leq c\sum_{j=k}^{\infty}\left\|\Delta_j f.\overline{\Delta}_j g\right\|_v, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder $\left(\frac{1}{v}=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{u}\right)$, alors

$$\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v \leq c\sum_{j=k}^{\infty}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u .$$

Donc

$$2^{k\sigma}\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v \leq c2^{k\sigma}\sum_{j=k}^{\infty}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u ,$$

ce qui implique

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{k\sigma}\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{k\sigma}\sum_{j=k}^{\infty}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

alors

$$\begin{aligned}\left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_{\ell_p(L_v)} &\leq \left\|2^{k\sigma}\sum_{j=k}^{\infty}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right\|_{\ell_p} \\ &\leq c\left\|2^{k(\beta+r)}\sum_{j=k}^{\infty}2^{-j(\beta+r)}2^{j(\beta+r)}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right\|_{\ell_p} .\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.3.1 $((\beta+r)>0)$ on a

$$\left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_{\ell_p(L_v)} \leq c\left\|2^{j(\beta+r)}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right\|_{\ell_p} \tag{2.2.15}$$

On pose $\frac{1}{\widetilde{q}_2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}$, la relation (2.2.15) devient la suivante

$$\begin{aligned}\left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_{\ell_p(L_v)} &\leq c\left\|2^{jr}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\right\|_{\ell_{\widetilde{q}_2}}\left\|2^{j\beta}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right\|_{\ell_{p_1}} \\ &= \left\|g\right\|_{B^r_{p_2,\widetilde{q}_2}}\left\|f\right\|_{B^\beta_{u,p_1}} .\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Nous avons aussi les relations (2.2.11), (2.2.12) et (2.2.13). Donc la relation (2.2.16), devient

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_{L_p(\ell_q)} \leq c\left\|g\right\|_{B^r_{p_2,q_2}}\left\|f\right\|_{F^s_{p_1,q}}$$

- **Etudier le cas $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1$**

Soient σ, u et v telle que

$$\max\left(0,1-\frac{1}{P_2},\frac{1}{p_1}-\frac{r}{n}\right)<\frac{1}{u}<\frac{1}{p_1}. \tag{2.2.17}$$

et

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{u}, \qquad \sigma=s-\frac{n}{p}+\frac{n}{v}.$$

On a

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v &= \left\|\sum_{j=k}^{\infty}\Delta_k\left(\Delta_j f.\overline{\Delta}_j g\right)\right\|_v \\ &\leq \sum_{j=k}^{\infty}\left\|\Delta_k\left(\overline{\Delta}_j g.\Delta_j f\right)\right\|_v .\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.3.3 on a

$$\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v \leq c\sum_{j=k}^{\infty}2^{(j-k)\rho}\left\|\overline{\Delta}_j g.\Delta_j f\right\|_v ,$$

avec $\rho=\frac{n}{v}-n=\frac{n}{p_2}+\frac{n}{u}-n$, donc

$$2^{k\sigma}\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v \leq c2^{k\sigma}\sum_{j=k}^{\infty}2^{(j-k)\left(\frac{n}{p_2}+\frac{n}{u}-n\right)}\left\|\overline{\Delta}_j g.\Delta_j f\right\|_v .$$

D'après l'inégalité de Hölder$\left(\frac{1}{v}=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{u}\right)$, on a

$$\begin{aligned}2^{k\sigma}\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v &\leq c2^{k\sigma}\sum_{j=k}^{\infty}2^{(j-k)\left(\frac{n}{p_2}+\frac{n}{u}-n\right)}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u \\ &\leq c2^{k(s-\frac{n}{p}+\frac{n}{v})}\sum_{j=k}^{\infty}2^{j\left(\frac{n}{p_2}+\frac{n}{u}-n\right)-k\left(\frac{n}{p_2}+\frac{n}{u}-n\right)}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u \\ &\leq c2^{k(s-\left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}-r\right)+(\frac{n}{p_2}+\frac{n}{u}))}\sum_{j=k}^{\infty}2^{j\left(\frac{n}{p_2}+\frac{n}{u}-n\right)-k\left(\frac{n}{p_2}+\frac{n}{u}-n\right)}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u \\ &\leq c2^{k(s-\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}+r+n)}\sum_{j=k}^{\infty}2^{j\left(\frac{n}{p_2}+\frac{n}{u}-n\right)}2^{j\left(s-\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}+r\right)}2^{-j\left(s-\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}+r\right)}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u \\ &\leq c2^{k\mu}\sum_{j=k}^{\infty}2^{-j\mu}\cdot 2^{j(r+\varrho)}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u\end{aligned}$$

où $\varrho=s-\frac{n}{p_1}+\frac{n}{u}$ et $\mu=s+r-\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}+n>0$, ce qui implique

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{k\sigma}\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{k\mu}\sum_{j=k}^{\infty}2^{-j\mu}\cdot 2^{j(r+\varrho)}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

D'après le lemme 1.3.1 ($\mu > 0$) on a

$$\left\| 2^{k\sigma} \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_{\ell_p(L_v)} \leq c \left\| 2^{j(r+\varrho)} \left\| \overline{\Delta}_j g \right\|_{p_2} \left\| \Delta_j f \right\|_u \right\|_{\ell_p} . \tag{2.2.18}$$

On pose $\frac{1}{\widetilde{q}_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}$, par l'application dans la relation (2.2.18), on trouve

$$\begin{aligned} \left\| 2^{k\sigma} \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_{\ell_p(L_v)} &\leq c \left\| 2^{jr} \left\| \overline{\Delta}_j g \right\|_{p_2} \right\|_{\ell_{\widetilde{q}_2}} \left\| 2^{j\varrho} \left\| \Delta_j f \right\|_u \right\|_{\ell_{p_1}} \\ &= c \left\| g \right\|_{B^r_{p_2,\widetilde{q}_2}} \left\| f \right\|_{B^\varrho_{u,p_1}} . \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Nous avons aussi $\varrho = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{u} \Rightarrow s - \frac{n}{p_1} = \varrho - \frac{n}{u}$, alors d'après le lemme 1.2.1 on a

$$F^s_{p_1,q} \hookrightarrow B^\varrho_{u,p_1},$$

puisque $\sigma > s$ et $v < p$, alors on a

$$\ell^\sigma_p (L^v) \hookrightarrow L^p \left(\ell^s_q \right).$$

Donc, la relation (2.2.19) devient

$$\left\| 2^{ks} \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_{L_p(\ell_q)} \leq c \left\| g \right\|_{B^r_{p_2,q_2}} \left\| f \right\|_{F^s_{p_1,q}} .$$

■

Chapitre 3

La multiplication du type $F \cdot (B \cap L_\infty) \hookrightarrow F.$

Dans ce dernier chapitre on va déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres (s, p_1, p_2, q) pour que l'inclusion du type $F \cdot (B \cap L_\infty) \hookrightarrow F$ soit vérifiées.

Théorème 3.0.2 *[4] Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p_1, p_2 < \infty$, $0 < q \leq \infty$, tel que*

$$-\frac{n}{p_2} + \max\left(0, \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} - n\right) < s < \min\left(\frac{n}{p_1}, \frac{n}{p_2}\right),$$

alors

$$F^s_{p_1,q} \cdot \left(B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty} \cap L_\infty\right) \hookrightarrow F^s_{p_1,q}.$$

Preuve. (i) **Estimation de** $\Delta_{k(1)}(f.g)$

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_{k(1)}(f.g)(x)\right| &= \left|\Delta_k\left(Q_{k+1}g.\widetilde{\Delta_k}f\right)(x)\right| \\
&= \left|\left(\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^{-k}\xi\right)\right) * \left(Q_{k+1}g.\widetilde{\Delta_k}f\right)(x)\right| \\
&= \left|\left(2^{kn}\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^k x\right)\right) * \left(Q_{k+1}g.\widetilde{\Delta_k}f\right)(x)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} 2^{kn}\left(\mathcal{F}^{-1}\gamma\right)\left(2^k y\right)\left(Q_{k+1}g.\widetilde{\Delta_k}f\right)(x-y)\,dy\right| \\
&\leq c'\left\|Q_{k+1}g\right\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\left(2^k|y|\right)^a\right)\left|\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^k y\right)\right| \frac{\left|\widetilde{\Delta_k}f(x-y)\right|}{\left(1+\left(2^k|y|\right)^a\right)}dy \\
&\leq c\left\|Q_{k+1}g\right\|_\infty\left(\widetilde{\Delta}^{*,a}_k f\right)
\end{aligned}$$

où $\widetilde{\Delta}_k^{*,a} f$ définie dans la remarque 2.1.1.

Puisque

$$\|Q_{k+1} g\|_\infty = \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\left(2^{-(k+1)}.\right) * g\right\|_\infty$$

D'après l'inégalité de Young, on a

$$\|Q_{k+1} g\|_\infty \leq \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\right\|_1 \|g\|_\infty$$

alors

$$\left|\Delta_{k(1)}(f.g)\right| \leq c\,\|g\|_\infty \left(\widetilde{\Delta}_k^{*,a} f\right)$$

Donc

$$2^{ks}\left|\Delta_{k(1)}(f.g)\right| \leq c\,\|g\|_\infty \left(2^{ks}\widetilde{\Delta}_k^{*,a} f\right)$$

ce qui implique

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(2^{ks}\left|\Delta_{k(1)}(f.g)\right|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\,\|g\|_\infty \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(2^{ks}\widetilde{\Delta}_k^{*,a} f\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

donc

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{\ell_q} \leq c\,\|g\|_\infty \left\|2^{ks}\widetilde{\Delta}_k^{*,a} f\right\|_{\ell_q}$$

ce qui donne par la norme de L_{p_1}

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{L_{p_1}\left(\ell_q\right)} \leq c\,\|g\|_\infty \left\|2^{ks}\widetilde{\Delta}_k^{*,a} f\right\|_{L_{p_1}(\ell_q)}$$

Choisissons $a > \frac{n}{\min(p_1,q)}$ alors d'après la remarque 2.1.1 on a

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{L_{p_1}\left(\ell_q\right)} \leq c\,\|g\|_\infty \|f\|_{F^s_{p_1,q}}.$$

(ii)**Estimation de $\Delta_{k(2)}(f.g)$**

Soient σ, β, u et v telle que

$$\max\left(0, \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) < \frac{1}{u} < \min\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_1} - \frac{s}{n}\right)$$

et

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u}, \qquad \sigma = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{v}, \qquad \beta = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{u} \tag{3.0.1}$$

D'après le lemme 1.3.3 on a

$$\left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_v \leq c\left\|Q_{k+1} f.\widetilde{\Delta}_k g\right\|_v$$

en appliquant l'inégalité de Hölder $\left(\frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u}\right)$, alors

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_v &\leq c\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2} \|Q_{k+1}f\|_u \\
&= c\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2} \left\|\sum_{j=0}^{k+1} \Delta_j f\right\|_u \\
&\leq c\left\|\widetilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2} \sum_{j=0}^{k+1} \|\Delta_j f\|_u
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
2^{k\sigma}\left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_v &\leq c2^{k\sigma}\left\|\widetilde{\Delta_k} g\right\|_{p_2} \sum_{j=0}^{k+1} \|\Delta_j f\|_u \\
&\leq c\left(2^{k\frac{n}{p_2}}\left\|\widetilde{\Delta_k} g\right\|_{p_2}\right)\left(2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1} 2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\|\Delta_j f\|_u\right)\right) \\
&\leq c\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{k\frac{n}{p_2}}\left\|\widetilde{\Delta_k} g\right\|_{p_2}\right)\left(2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1} 2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\|\Delta_j f\|_u\right)\right)
\end{aligned}$$

Alors

$$2^{k\sigma}\left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_v \leq c\left(\|g\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}}\right)\left(2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1} 2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\|\Delta_j f\|_u\right)\right)$$

ce qui implique :

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{k\sigma}\left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_v\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq c\|g\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1} 2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\|\Delta_j f\|_u\right)\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

alors

$$\left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\ell_{p_1}(L_v)} \leq c\left(\|g\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}}\right)\left\|2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1} 2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\|\Delta_j f\|_u\right)\right\|_{\ell_{p_1}}.$$

D'après le lemme 1.3.1 $\left(\text{puis que } s < \frac{n}{p_1} \Rightarrow \beta < 0\right)$, on a

$$\left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\ell_{p_1}(L_v)} \leq c\|g\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}}\|f\|_{B^{\beta}_{u,p_1}},$$

Nous avons aussi

$$\ell^{\sigma}_{p_1}(L_v) \hookrightarrow L_{p_1}\left(\ell^s_q\right) \quad \text{et} \quad F^s_{p_1,q} \hookrightarrow B^{\beta}_{u,p_1}$$

Alors

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{L_{p_1}(\ell_q)} \leq c\|g\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}}\|f\|_{F^s_{p_1,q}}$$

(iii)**Estimation de** $\Delta_{k(3)}(f.g)$

• **Etudier le cas** $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1$

Soient σ, u β et v telle que

$$\max\left(0, \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{s}{n}\right) < \frac{1}{u} < \frac{1}{p_1}$$

et la relation (3.0.1), on a $\rho = \max\left(0, \frac{n}{v} - n\right) = 0$ puis que $\frac{n}{v} - n = \frac{n}{p_2} + \frac{n}{u} - n < \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1} - n \leq 0$, alors d'après le lemme 1.3.3

$$\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v \leq c \sum_{j=k}^{\infty} \left\|\Delta_j f.\overline{\Delta}_j g\right\|_v$$

en appliquant l'inégalité de Hölder $\left(\frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u}\right)$, alors

$$\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v \leq c \sum_{j=k}^{\infty} \left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2} \left\|\Delta_j f\right\|_u$$

Donc

$$2^{k\sigma} \left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_v \leq c 2^{k\sigma} \sum_{j=k}^{\infty} \left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2} \left\|\Delta_j f\right\|_u$$

ce qui implique

$$\left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_{\ell_{p_1}(L_v)} \leq c \left\|2^{k\left(\beta + \frac{n}{p_2}\right)} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\left(\beta + \frac{n}{p_2}\right)} 2^{j\left(\beta + \frac{n}{p_2}\right)} \left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2} \left\|\Delta_j f\right\|_u\right\|_{\ell_{p_1}}$$

D'après le lemme 1.3.1 ($(\beta + \frac{n}{p_2}) > 0$) on a

$$\left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_{\ell_{p_1}(L_v)} \leq c \left\|\left(2^{j\frac{n}{p_2}} \left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\right) \left(2^{j\beta} \left\|\Delta_j f\right\|_u\right)\right\|_{\ell_{p_1}}$$

l'inégalité de Hölder donne

$$\left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_{\ell_{p_1}(L_v)} \leq c \left\|g\right\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}} \left\|f\right\|_{B^{\beta}_{u,p_1}} \tag{3.0.2}$$

Et comme

$$\ell^{\sigma}_{p_1}(L_v) \hookrightarrow L_{p_1}\left(\ell^s_q\right), \text{ et } F^s_{p_1,q} \hookrightarrow B^{\beta}_{u,p_1}$$

Alors, la relation (3.0.2) devient

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_{L_{p_1}(\ell_q)} \leq c \left\|g\right\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}} \left\|f\right\|_{F^s_{p_1,q}}$$

• **Etudier le cas** $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$

Soient σ, β, u et v telle que

$$\max\left(0, 1 - \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) < \frac{1}{u} < \frac{1}{p_1}.$$

et

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u}, \qquad \sigma = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{v}$$

D'après le lemme 1.3.3 on a

$$\begin{aligned} \left\|\Delta_{k(3)}\left(f.g\right)\right\|_v &= \left\|\sum_{j=k}^{\infty} \Delta_k\left(\Delta_j f.\overline{\Delta}_j g\right)\right\|_v \\ &\leq \sum_{j=k}^{\infty} \left\|\Delta_k\left(\Delta_j f.\overline{\Delta}_j g\right)\right\|_v \\ &\leq c' \sum_{j=k}^{\infty} 2^{(j-k)\rho} \left\|\Delta_j f.\overline{\Delta}_j g\right\|_v \end{aligned}$$

avec $\rho = \frac{n}{v} - n = \frac{n}{p_2} + \frac{n}{u} - n$, donc

$$2^{k\sigma} \left\|\Delta_{k(3)}\left(f.g\right)\right\|_v \leq c 2^{k\sigma} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{(j-k)\left(\frac{n}{p_2} + \frac{n}{u} - n\right)} \left\|\Delta_j f.\overline{\Delta}_j g\right\|_v$$

D'après l'inégalité de Hölder$\left(\frac{1}{v} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u}\right)$, on a

$$2^{k\sigma} \left\|\Delta_{k(3)}\left(f.g\right)\right\|_v \leq c 2^{k\mu} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\mu} 2^{j\left(\frac{n}{p_2} + \varrho\right)} \left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2} \left\|\Delta_j f\right\|_u$$

où $\varrho = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{u}$ et $\mu = s + \left(r = \frac{n}{p_2}\right) - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + n = s - \frac{n}{p_1} + n > 0$

ce qui implique

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(2^{k\sigma} \left\|\Delta_{k(3)}\left(f.g\right)\right\|_v\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq c \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(2^{k\mu} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\mu} \cdot 2^{j\left(\frac{n}{p_2} + \varrho\right)} \left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2} \left\|\Delta_j f\right\|_u\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

alors

$$\left\|2^{k\sigma} \Delta_{k(3)}\left(f.g\right)\right\|_{\ell_{p_1}(L_v)} \leq c \left\|2^{k\mu} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\mu} \left(2^{j\frac{n}{p_2}} \left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\right) \left(2^{j\rho} \left\|\Delta_j f\right\|_u\right)\right\|_{\ell_{p_1}}.$$

D'après le lemme 1.3.1 (puis que $\mu > 0$) on a

$$\left\|2^{k\sigma} \Delta_{k(3)}\left(f.g\right)\right\|_{\ell_{p_1}(L_v)} \leq c \left\|\left(2^{j\frac{n}{p_2}} \left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\right) \left(2^{j\rho} \left\|\Delta_j f\right\|_u\right)\right\|_{\ell_{p_1}}$$

Par l'inégalité de Hölder on trouve

$$\left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(3)}\left(f.g\right)\right\|_{\ell_{p_1}(L_v)} \leq c \sup_{j\in\mathbb{N}}\left(2^{j\frac{n}{p_2}}\left\|\overline{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{j\rho}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

Alors

$$\left\|2^{k\sigma}\Delta_{k(3)}\left(f.g\right)\right\|_{\ell_{p_1}(L_v)} \leq c\left\|g\right\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}}\left\|f\right\|_{B^{\varrho}_{u,p_1}} \tag{3.0.3}$$

Nous avons aussi $\varrho = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{u} \Rightarrow s - \frac{n}{p_1} = \varrho - \frac{n}{u}$, alors d'après le lemme 1.2.1 on a

$$F^s_{p_1,q} \hookrightarrow B^{\varrho}_{u,p_1}.$$

et

$$\ell^{\sigma}_{p_1}\left(L_v\right) \hookrightarrow L_{p_1}\left(\ell^s_q\right)$$

Alors la relation (3.0.3) devient

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(3)}\left(f.g\right)\right\|_{L_{p_1}(\ell_q)} \leq c\left\|g\right\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}}\left\|f\right\|_{F^s_{p_1,q}}$$

■

Conclusion

L'objectif de ce travail est d'étudier la multiplication ponctuelle dans les espaces de Besov et les espaces de Triebel-Lizorkin, on a déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres (s, s_0, s_1), (p, p_0, p_1), (q, q_0, q_1) pour que les deux inclusion

$$F^s_{p_1,q} \cdot B^r_{p_2,q_2} \hookrightarrow F^s_{p,q} \qquad \text{et} \qquad F^s_{p_1,q} \cdot \left(B^{\frac{n1}{p_2}}_{p_2,\infty} \cap L_\infty \right) \hookrightarrow F^s_{p_1,q}$$

soit vérifiées.

Chapitre 4

Bibliographie

Bibliographie

[1] J. Bergh et J. Löfstrom. Interpolation spaces. Springer-verlag, 1976.

[2] A. Djeriou. Thèse doctorat en sciences université Batna, 2012.

[3] D. Drihem et M. Moussai. *Some embeddings into the multiplier spaces associated to Besov and Lizorkin-Triebel spaces.* Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen**21** (2002), no. 1, 179–184.

[4] D. Drihem et M. Moussai. *On the pointwise multiplication in Besov and Lizorkin-Triebel spaces.* Int.J.M.M.S. Vol.**21** (2006), Article ID 76182, 1–18.

[5] J. Franke. *On the spaces $F_p^{s,q}$ of Triebel–Lizorkin type: Pointwise multipliers and spaces on domains.* Math. Nachr, **125** (1986), 29–68 .

[6] J. Marschall. *Nonregular pseudo-differential operators.* Z. Anal. Anwendungen **15** (1996), 109-148.

[7] T. Runst et W. Sickel. Sobolev spaces of fractional order, Nemytskii operators and nonlinear partial differential equations. de Gruyter, Berlin 1996.

[8] E. M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press. 1970.

[9] E. M Stein. Harmonic Analysis,real-variable methodes, orthogonality and oscillatory integrals.Press,Priceeton New Jersey,1993

[10] H. Triebel. Theory of function spaces. Birkhäuser, Basel, 1983.

[11] H. Triebel. Theory of function spaces II. Birkhäuser, Basel, 1992.