

**UNIVERSITÉ DE M'SILA**  
**FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE**  
**DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES**

**Mémoire**

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Domaine:** Mathématiques et Informatiques

**Filière:** Mathématiques

**Option:** Mathématiques Appliquées et fondamental

**Par**

**Merhoun Hassiba**

**THÈME**

<b>SUR FORMULATION ET RESOLUTION D'UN PROBLEME DE D'ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL DE TYPE JET</b>
---

Soutenu le : ../0./ 2016

Devant le jury composé de :

- 1).....
- 2).....
- 3).....

**Dirigé par:**

*Mr.*GASMI ABD ELKADER

Année: **2015/2016**

# *Remerciements*

Je tiens à remercier, en premier lieu, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercier Mr. **GASMI Abdelkader** directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères et ma soeur qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

---

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A mes soeurs

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

# Table des matières

# Introduction

L'étude de la mécanique des fluides remonte au moins à l'époque de la Grèce antique avec le célèbre savon Archimède, connu par son principe qui fut à l'origine de la statique des fluides. Aujourd'hui, la dynamique des fluides est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus.

Dans ce mémoire on étudie formulation et résolution d'un problème d'écoulement bidimensionnel de type jet d'un fluide incompressible et on étudie le problème d'écoulement à surface libre.

Ce mémoire est composé en trois chapitres:

Dans le premier chapitre nous rappelons les notions sur les écoulements bidimensionnels en mécanique des fluides, et on présente quelques équations qui régissent les mouvements des fluides.

Le deuxième chapitre, on étudie formulation d'un problème d'écoulement bidimensionnel à surface libre, et on utilise la méthode d'hodographe et la transformation de Schwarz-Christoffel pour obtenir la solution exacte de cet problème.

Dans dernière chapitre, on traite l'existence de la solution du problème.

Et on se termine ce travail par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Quelques notions sur les écoulements bidimensionnels

Le milieu continu appartient dans plusieurs phénomènes physiques. Leur transport, dans des réservoirs ou des canalisations, constitue la principale préoccupation lorsque ces corps sont des matières premières comme l'eau, le pétrole, le gaz naturel... Ils servent également à véhiculer l'énergie qu'ils accumulent sous forme de pression ou de vitesse (centrale hydroélectrique, vérins, moteurs hydrauliques ou pneumatiques).

### 1.1 Définitions

#### 1.1.1 Le fluide

Un fluide peut être considéré comme étant un milieu continu ses particules libres de se déplacer les unes par rapport à l'autre. Un fluide est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

#### 1.1.2 Ecoulement bidimensionnel

On appelle un écoulement bidimensionnel tout écoulement où le vecteur vitesse est parallèle à un plan fixe  $(o, x, y)$  dans tout l'espace.

Dans ce cas on trouve que toutes les fonctions de ce type d'écoulement sont liées par les deux variables indépendantes  $(x, y)$  et le vecteur vitesse  $\vec{q}$  à deux composantes  $(u, v)$ , où  $u$  est la composante horizontal et  $v$  la composante vertical.

### 1.1.3 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure. La masse volumique est constante:

$$\rho = cte$$

Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

### 1.1.4 Ecoulement permanent

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est constant dans le temps. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs vitesse est uniforme dans l'espace.

### 1.1.5 Ecoulement parfait

Un fluide est dit en écoulement parfait si on néglige tous les phénomènes diffusifs est notamment sa viscosité, donc si on néglige les frottements entre les couches voisines de fluide en mouvement, un écoulement parfait ne dissipe donc pas de chaleur (adiabatique et réversible).

### 1.1.6 Ecoulement irrotationnel

Dans les régions d'écoulements, loin des parois solides ou le fluide peut être considéré comme non visqueux, l'écoulement est dit irrotationnel et on a alors la condition:

$$\vec{\Omega} = \text{Rot} \vec{q} = 0$$

$\vec{\Omega}$  : représente le vecteur rotation.

$\vec{\Omega}$  est par définition nul pour un écoulement irrotationnel.

## 1.2 Fonction de courant et fonction potentiel

### 1.2.1 Fonction de courant

Dans le cas d'un écoulement plan, l'équation d'une ligne de courant définie par:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

La condition d'incompressibilité s'écrit:

$$\operatorname{div} \vec{q} = 0$$

Cette équation sera satisfaite s'il existe une fonction  $\psi(x, y)$  continue, telle que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Alors on a

$$\operatorname{div} \vec{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

Donc  $\operatorname{div} \vec{q} = 0$  est bien vérifiée.

La fonction  $\psi(x, y)$  telle que:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

S'appelle fonction de courant.

### 1.2.2 Fonction potentiel

La condition d'un écoulement irrotationnel définie par:

$$\operatorname{Rot} \vec{q} = 0$$

On peut toujours définir une fonction  $\varphi(x, y)$  telle que:



$$\vec{q} = \text{grad } \varphi$$

Puisque

$$\vec{Rot}(\text{grad } \varphi) = 0$$

On a vu dans le cas plan,

$$\vec{Rot} \vec{q} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Alors:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

En admettant la fonction  $\varphi(x, y)$  continue:

$$\implies \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \implies \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Donc la condition d'irrotationnalité  $\vec{Rot} \vec{q} = 0$  est vérifiée.

La fonction  $\varphi(x, y)$  telle que:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

S'appelle fonction potentiel ou potentiel des vitesses.

## 1.3 Les équations de base qui régissent les mouvements des fluides

### 1.3.1 Théorème du transport de Reynolds

**Théorème 1.3.1** Soit  $V(t)$  un volume matériel et  $G(x, t)$  une fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle quelconque. Alors:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} G dV = \int_{V(t)} \left( \frac{DG}{Dt} + G \nabla \cdot q \right) dV$$

### 1.3.2 Conservation de la masse

La masse du fluide occupant un volume matériel  $V(t)$  est  $\int_{V(t)} \rho dV$  et la conservation de la masse requiert que:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0 \quad (1.1)$$

On utilise le théorème du transport de Reynolds et (1.1) devient:

$$\int_{V(t)} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot q \right) dV = 0 \quad (1.2)$$

tel que (1.2) est vrai pour tout volume fermé  $V$ , et en supposant que la fonction à intégrer est continue, on en déduit que:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot q = 0 \quad (1.3)$$

Cette équation qui traduit la conservation de la masse, est aussi référée comme l'équation de continuité.

#### Cas particuliers

**Ecoulement permanent** Dans le cas des écoulements permanents de fluide conservatif, l'équation de continuité se réduit à:

$$\rho \nabla \cdot q = 0$$

**Fluide incompressible** L'équation de continuité se réduit alors, dans le cas d'un écoulement permanent, conservatif d'un fluide incompressible, on a:

$$\nabla \cdot q = 0$$

### 1.3.3 Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement du fluide occupant le volume  $V(t)$  est:

$$\int_{V(t)} \rho q dV$$

et la conservation de la quantité de mouvement (Euler) pour un fluide idéal (parfait) donne:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho q dV = - \int_{S(t)} p n dS + \int_{V(t)} \rho g dV \quad (1.4)$$

où le vecteur  $g$  est la force massique par unité de masse (par exemple, la gravité). En faisant passer la dérivée temporelle du membre de gauche de (1.4) dans l'intégrale par le théorème du transport de Reynolds, et en utilisant l'équation de continuité, on a:

$$\int_{V(t)} \rho \frac{DV}{Dt} dV = - \int_{S(t)} p n dS = - \int_{V(t)} \nabla p dV + \int_{V(t)} \rho g dV \quad (1.5)$$

Puisque (1.5) est vrai pour tout volume fermé  $V$ , et en supposant que la fonction à intégrer est continue, on en déduit que:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \rho g \quad (1.6)$$

**Remarque 1.3.1** Les équations d'Euler (1.3) et (1.6) sont les équations de base pour un fluide idéal.

## 1.4 Définition d'un Force conservative

Un champ vectoriel  $F$  défini sur un domaine  $D$  est conservatif si, pour deux points quelconques  $P$  et  $Q \in D$ , l'intégrale curviligne:

$$\int_P^Q F \cdot t ds = \int_P^Q F \cdot dx$$

À la même valeur de long de tout chemin lisse par morceaux entre  $P$  et  $Q$  entièrement contenu dans  $D$ . Alors, si  $P = (x, y, z)$  et un point fixe  $O \in D$  :

$$K(P) = \int_O^Q F \cdot dx \Rightarrow F = \nabla K$$

Puisque la force gravitationnelle est conservative elle peut être écrite en fonction d'un gradient d'un potentiel:

$$g = -\nabla\varphi$$

À l'aide de l'identité vectorielle:

$$(q \cdot \nabla q) = (\nabla \times q) \times q + \nabla \left( \frac{1}{2} V^2 \right)$$

les équations d'Euler peuvent maintenant être exprimées sous la forme:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\nabla \times q) \times q = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + \varphi \right)$$

## 1.5 Le théorème de Bernoulli

Si l'écoulement est stationnaire l'équation d'Euler se réduit à:

$$(\nabla \times q) \times q = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + \varphi \right). \quad (1.7)$$

En prenant le produit scalaire de (1.7) avec  $q$  on obtient:

$$q \cdot \nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + \varphi \right) = 0$$

De sorte que pour un fluide idéal  $H : \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + \varphi$  est constant le long d'une ligne de courant (Bernoulli).

## 1.6 Fonctions analytiques

Si la dérivée  $f(z)$  existe en tout point  $z$  d'un ouvert connexe  $\Omega$ , alors  $f(z)$  est dite analytique dans  $\Omega$ .

Une fonction  $f(z)$  est dite analytique (holomorphe) en un point  $z_0$ , s'il existe un voisinage  $|z - z_0| < \delta$  en tout point duquel  $f'(z)$  existe.

**Définition 1.6.1** On dit que la fonction  $u$  de deux variables réelles et à valeur réelle est harmonique si elle fonction vérifie:

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \text{où} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$\Delta$  : opérateur de Laplacien.

## 1.7 Transformations conformes

**Définition 1.7.1** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction différentiable au sens des fonctions de deux variables réelles, et non constante au voisinage d'un point  $(x_0, y_0)$ . On dit que  $f$  préserve les angles au point  $(x_0, y_0)$  si quels que soient les arcs de courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  passant par  $(x_0, y_0)$  les vecteurs tangents à ces courbes au point  $(x_0, y_0)$  font le même angle orienté que les vecteurs tangents aux courbes  $f(\Gamma_1)$  et  $f(\Gamma_2)$  au point  $f(x_0, y_0)$ .

**Définition 1.7.2** Une fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  différentiable et qui préserve les angles en tout point de l'ouvert, supposé connexe  $\Omega$ , est appelée **transformation conforme**. L'ensemble image  $f(\Omega)$  est appelé représentation conforme de l'ouvert  $\Omega$ .

Toute fonction  $f$  holomorphe sur  $\Omega$  dont la dérivée ne s'annule pas est une transformation conforme.

## 1.8 Définition d'hodographe

Le hodographe est une transformation des coordonnées utilisées dans la dynamique des fluides. Alors que dans le plan physique, les variables indépendantes sont les coordonnées de position, dans le plan d'hodographe, les variables indépendantes sont les composantes du vecteur vitesse de la particule fluide. Les variables dépendantes sont déterminées à partir des composantes de la vitesse.

## 1.9 Potentiel complexe

Un point  $M(x_1, x_2)$  dans le plan d'écoulement, peut être défini par la variable complexe  $z$  :

$$z = x_1 + ix_2 = r \exp i\theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Dans laquelle  $r$  est le module de  $z$  et son argument. Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  étant harmoniques, on peut associer à l'écoulement un potentiel complexe  $w(z, t)$  définie par :

$$w(z, t) = \varphi + i\psi$$

La dérivée de  $w$  par rapport à  $z$  est appelée vitesse complexe de l'écoulement :

$$\frac{dw}{dz} = u_1 - iu_2 = \|u\| \exp(-i\alpha)$$

L'angle  $\alpha$  est celui que fait le vecteur vitesse avec l'axe des  $x_1$ . La donnée du potentiel complexe permet de définir complètement l'écoulement.

## 1.10 La transformation de SCHWARZ - CHRISTOFFEL

Considérons un polygone dans le plan des  $w$ , ayant pour sommets  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , et pour angles intérieurs respectivement  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Soit  $w_1, w_2, \dots, w_n$  les points correspondant respectivement à  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de l'axe réel du plan des  $z$  (voir Figure 1.1).

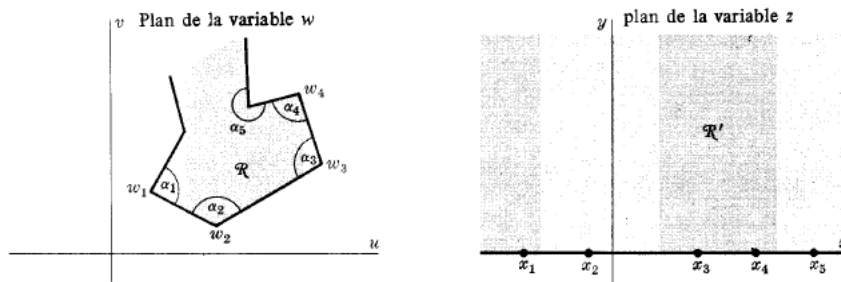


Figure 1.1: La transformation de Schwarz-Christoffel

Une transformation qui représente l'intérieur  $R$  du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des  $z$ , et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donnée par:

$$\frac{dw}{dz} = A (z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1} (z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1}$$

Où

$$w = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1} (z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1} dz + B.$$

Où A et B sont des constantes complexes.

# Chapitre 2

## Formulation et résolution d'un problème d'écoulement à surface libre

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on traite formulation et résolution d'un problème d'écoulement à surface libre. On étudie le problème classique de l'écoulement aérodynamique libre d'un fluide idéal. Le travail dans ce type de problème est caractérisé par l'utilisation de la formule de Schwarz-Christoffel et la méthode d'hodographe.

### 2.2 Formulation du problème

Une couche fluide d'épaisseur  $h$  d'écoulement horizontalement à la vitesse  $U_\infty$  sur une plaque mince se trouvant le long de l'axe  $x$ -négatif, avant de tourner le coin à  $x = 0$  et due en arrière le long de la face inférieure de la plaque, comme représenté sur la Figure 2.1.



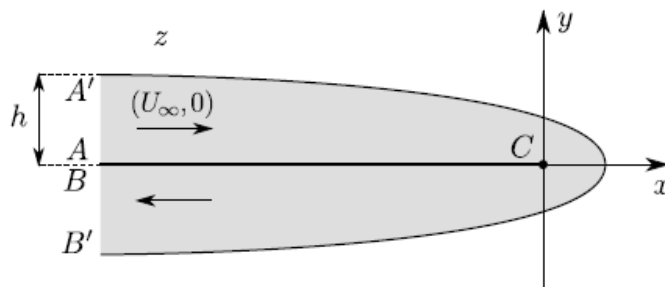


Figure 2.1 :Un modèle pour l'écoulement autour du bec  
d'une théière

La plaque  $ACB$  et la surface libre  $A'B'$  sont les deux lignes de courant.

Le flux net est  $U_\infty h$  ainsi sans perte de généralité nous avons:

$$\psi = 0 \text{ sur } ACB, \quad \psi = U_\infty h \text{ sur } A'B'.$$

Sur la surface libre, nous avons aussi par le théorème de Bernoulli:

$$|u| = \text{constante} U_\infty \text{ sur } A'B'.$$

Il est utile de nondimensionalise en escaladant  $z$  avec  $h$  et  $w$  avec  $U_\infty h$ . La résultante du problème normalisé est esquissé à la Figure 2.2, où nous avons également marqué le "nez"  $N$  de la fluide.

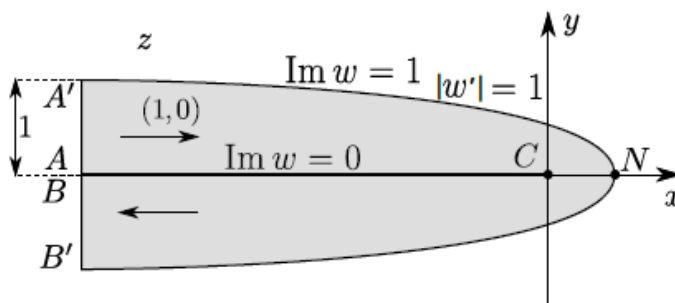


Figure 2.2: Un modèle normalisé pour l'écoulement autour du bec d'une théière

Maintenant, nous pouvons voir le potentiel complexe comme une application conformable  $z \mapsto w(z)$  à partir de le plan physique au plan potentiel, et notre première étape est d'examiner ce qu'est l'image de l'ombré domaine fluide est dans le plan  $w$ .

Rapplons que  $w = \varphi + i\psi$ . Le domaine fluide est délimitée par les courbes sur lesquelles  $\psi = 0$  et  $\psi = 1$ , ce qui sont des lignes droites horizontales dans le plan potentiel. À  $AA'$  on a  $w \sim z$  et où  $\varphi \sim x \rightarrow -\infty$ . De même, à  $BB'$  nous avons  $w \sim -z$  et par conséquent  $\varphi \sim -x \rightarrow +\infty$ .

En fin, sans perte de généralité on peut choisir l'origine pour  $\varphi$  tel que  $w = 0$  à  $C$ . Puis, comme par symétrie  $u = 0$  sur  $CN$ , il en résulte que  $\varphi$  est constante sur  $CN$  et donc  $\varphi = 0$  à  $N$ . Par conséquent, le domaine fluide dans le plan de potentiel est aussi esquissée dans Figure 2.3, où  $w = i$  est l'image de  $N$ .

En suite, nous faisons la même chose pour le plan d'hodographe, qui est l'image du domaine fluide sous la transformation:

$$z \mapsto f(z) = \frac{dw}{dz} = u - iv.$$

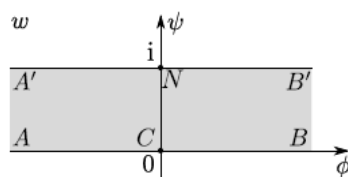


Figure 2.3: le plan potentiel pour  
l'écoulement de théière

Sur la plaque, la vitesse normale doit être nulle, à savoir  $v = 0$  sur  $y = 0$ , de sorte que la ligne de courant est mis en correspondance avec l'axe  $u$ . En  $C$ , le fluide tourne d'un angle  $2\pi \succ \pi$ , de sorte que la vitesse sera infinie au coin. Par conséquent  $u$  augmente de 1 à  $A$  vers  $+\infty$  à  $C$ , puis sur la face inférieure de la plaque augmente de  $-\infty$  à  $C$  vers  $-1$  à  $B$ . Puisque  $|f| = 1$  sur la surface libre, la courbe  $A'B'$  est mis en correspondance avec une partie du cercle unité dans le plan de hodographe.

Nous déduisons Figure 2.2 que  $v < 0$  partout, avec  $v \rightarrow 0$  en  $A$  et  $A'$ , alors que  $v = -1$  et  $u = 0$  au nez  $N$ . Par conséquent, l'écoulement dans le plan d'hodographe est comme le présente la Figure 2.4.

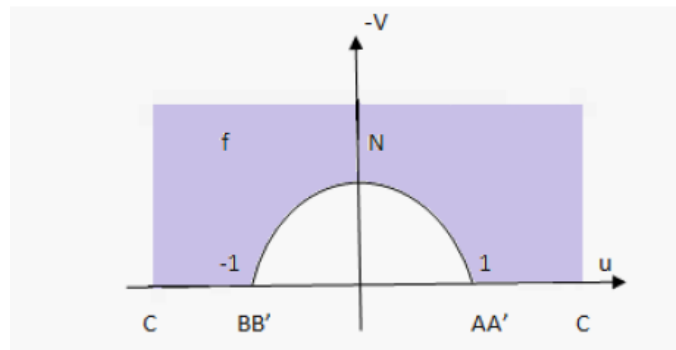


Figure 2.4: Le plan hodographe pour l'écoulement de théière.

Maintenant, on va tracer le plan de potentiel et le plan d'hodographe dans le même plan sur l'axe  $\zeta$ . comme le présente la Figure 2.5.

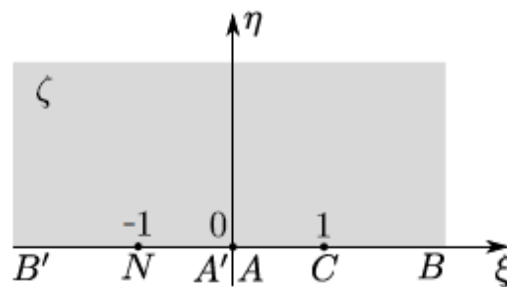


Figure 2.5: Le plan potentiel pour l'écoulement de théière est tracé à le demi-plan supérieur par la transformation

$$\zeta = e^{\pi w}$$

## 2.3 Résolution du problème

### Correspondance de $w$ vers $\zeta$

D'après la transformation de Schwarz-Christoffel.

Sur le plan  $w$  : L'angle à la point A est 0, et l'angle à la point N est  $\pi$ . Et sur le plan  $\zeta$  :  $A = 0$  et  $N = 0$ .

Alors

$$w = \alpha \int (\zeta - 0)^{0/\pi-1} (\zeta + 1)^{\pi/\pi-1} + \beta$$

$$\Rightarrow w = \alpha \int \frac{1}{\zeta} + \beta$$

$$\Rightarrow w = \alpha \log \zeta + \beta.$$

On détermine les constantes complexes  $\alpha$  et  $\beta$  :

Pour  $w = i$  et  $\zeta = -1$  alors  $i = \alpha \log(-1) + \beta$ .

Pour  $w = 0$  et  $\zeta = 1$  alors  $\beta = 0$ .

Donc  $\alpha = i/2 \log i$ .

Sachant que  $\log i = i\pi/2$  on a  $\alpha = 1/\pi$ .

Alors

$$w = \frac{1}{\pi} \log \zeta$$

$$\Rightarrow \zeta = e^{\pi w}.$$

Maintenant, la transformation:

$$\zeta = \left( \frac{f-1}{f+1} \right)^2.$$

Transformer le plan d'hodographe sur le demi-plan supérieure  $\zeta$  et transformer les points  $A, B, C, N$  les mêmes points sur le réel de l'axe  $\zeta$ .

C'est les positions des trois points sur les bornes sont fixé, la transformation conforme de tout domaine sur le demi-plan supérieur est unique.

Par conséquent, le potentiel complexe et sa dérivée doivent satisfaire à la relation:

$$e^{\pi w} = \zeta = \left( \frac{f-1}{f+1} \right)^2 \tag{2.1}$$

c'est-à-dire que nous obtenons une équation différentiel pour  $w(z)$ .

De l'équation (2.1) on a:

$$\frac{f-1}{f+1} = e^{\pi w/2}$$

$$\Rightarrow f \times (e^{\pi w/2} - 1) = -(e^{\pi w/2} + 1)$$

$$\Rightarrow f = \frac{1 + e^{\pi w/2}}{1 - e^{\pi w/2}}$$

$$\Rightarrow f = -\coth(\pi w/4)$$

D'autre part on a

$$f = \frac{dw}{dz}$$

Alors

$$\frac{dw}{dz} = -\coth(\pi w/4)$$

Par intégration:

$$\begin{aligned} \int \tanh(\pi w/4) dw &= - \int dz \\ \Rightarrow \frac{4}{\pi} \int \frac{\pi/4 \sinh(\pi w/4)}{\cosh(\pi w/4)} dw &= - \int dz \\ \Rightarrow \frac{4}{\pi} \log \cosh(\pi w/4) &= -z \end{aligned}$$

Où nous avons appliqué la condition aux limite  $w = 0$  lorsque  $z = 0$ .

Ainsi, le potentiel complexe  $w(z)$  est donnée par:

$$\cosh(\pi w/4) = e^{-\pi z/4}$$

Sachant que  $\cosh(\pi w/4) = (e^{\pi w/4} + e^{-\pi w/4})/2$ , en élevant au carré les deux côtés :

$$\left( \frac{e^{\pi w/4} + e^{-\pi w/4}}{2} \right)^2 = (e^{-\pi z/4})^2$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{e^{\pi w/2} + e^{-\pi w/2}}{2} + 1 \right) = e^{-\pi z/2}.$$

Donc on a:

$$\Rightarrow 1 + \cosh(\pi w/2) = 2e^{-\pi z/2}$$

La ligne de courant libre donnée par:  $\psi = 1$  c'est-à-dire  $w = \varphi + i$  avec  $\varphi \in (-\infty, +\infty)$ .

Alors:

$$2e^{-\pi z/2} = 1 + \cosh\left(\frac{\pi\varphi}{2} + \frac{i\pi}{2}\right) = 1 + i \sinh\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right).$$

D'autre part on a:

$$2 \exp(-\pi z/2) = 1 + i \sinh\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2e^{-\pi x/2} e^{-i\pi y/2} = 1 + i \sinh\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)$$

et on a  $e^{-i\pi y/2} = \cos(\pi y/2) - i \sin(\pi y/2)$ .

Alors

$$2e^{-\pi x/2} \cos(\pi y/2) - 2ie^{-\pi x/2} \sin(\pi y/2) = 1 + i \sinh\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right) \quad (2.2)$$

Lorsque on prend la partie réel de deux côtés de l'équation (2.2), on déduit que la position de la surface libre donnée par l'équation:

$$2e^{-\pi x/2} \cos(\pi y/2) = 1.$$

En particulière, pour  $y = 0$  on obtient:

$$2e^{-\pi x/2} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \log 2}{\pi}$$

Alors, la solution analytique de cette problème est:

$$x = \frac{2 \log 2}{\pi} \quad \text{et} \quad y = 0$$



# Chapitre 3

## Existence de la solution du problème

### 3.1 Introduction

Un certain nombre d'écoulements de frontière libre des fluides incompressibles sous la pesanteur ont été montrés pour dépendre de la solution des équations intégrales non-linéaires.

Cependant, dans beaucoup de cas la preuve de l'existence de la solution de l'équation intégrale n'était pas réalisée. In cas où l'existence a été montrée, la convexité de la frontière libre était indispensable. Mais pour beaucoup de problèmes que la frontière libre n'est pas nécessairement convexe. Nous étudions un problème typique de ce type au moyen des théorèmes de point fixe pour des opérateurs dans les espaces de Banach.

Nous établissons l'existence d'une classe des écoulements de théorie pour des nombres élevés de Froud et prouvons aussi que l'opérateur non-linéaire dont les points fixes représentent ces écoulements est un opérateur de contraction dans certains cas.

Considérer le plan régulier de l'écoulement irrotationnel d'un fluide non visqueux incompressible par une théorie dans un domaine de la gravité constante .

### 3.2 Dérivation de l'équation intégrale

L'écoulement est établi en trouvant un potentiel complexe  $w = \varphi + i\psi$  qui satisfait:

(a)  $w$  est analytique dans le domaine de l'écoulement.

- (b)  $dw/dz$  est continue sur la frontière de l'écoulement.
- (c)  $|dw/dz| = U_\infty$  à  $A'$
- (d)  $\psi = U_\infty h$  sur  $A'B'$  et  $\psi = 0$  sur  $ABC$ .
- (e)  $u^2/2 + gy = \text{constante}$  sur la frontière libre  $A'B'$ , où  $u$  est la vitesse et  $z = x + iy$ .

Nous trouvons un écoulement tel que la limite des approximations finies de jet (Figure 3.1), dans lequel la frontière libre ne se prolonge pas à l'infini.

En condition d'approximation (d) exige  $\psi = U_\infty h$  sur  $A'NB'$  et  $\psi = 0$  sur  $ABC$ .

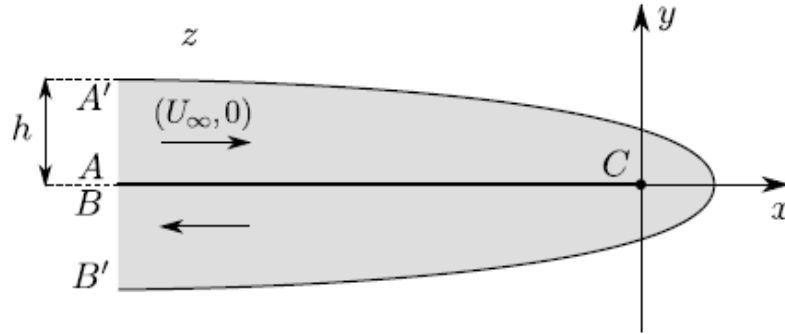


Figure 3.1: L'approximation fini de jet

Soit  $\theta$  est l'inclinaison du vecteur de vitesse, la vitesse complexe est donnée par:

$$ue^{-i\theta} = -\frac{dw}{dz}$$

on définit la variable complexe  $v$  par :

$$v^\gamma = ue^{-i\theta}/U_\infty = -(1/U_\infty) \frac{dw}{dz} \quad (3.1)$$

Les points dans le plan  $v^\gamma$  correspondant aux points dans le plan  $z$  sont présentés dans Figure 3.2. Cet plan est généralement appelé le plan d'hodographe.

Si l'écoulement était exempt de pesanteur la courbe  $A'B'$  dans le plan d'hodographe par la condition (e) serait demi-cercle d'unité. À cet effet, nous cherchons une transformation conforme  $f$  du demi-cercle d'unité (dans le plan  $\zeta$ ) au domaine dans le plan  $v$ .

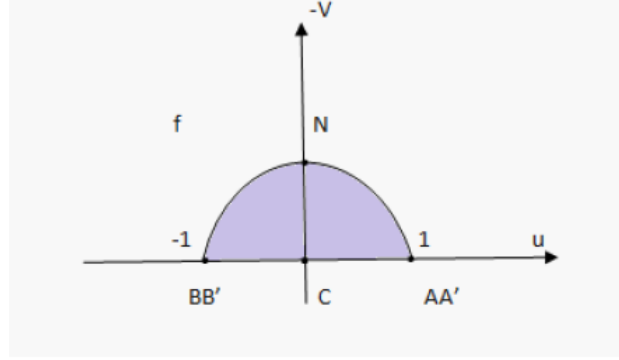


Figure 3.2: Le plan d'hodographe

Ainsi la transformation  $f$  représente l'effet de la pesanteur sur la vitesse complexe.

Dans le plan  $\zeta$  le point  $A'$  est placée au  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < 1$ , et  $B'$  au point  $\alpha < 1$  tel que. Par conséquent, le problème est réduit à trouver une fonction  $v = f(\zeta)$  qui satisfait:

- (i)  $f$  est analytique pour  $|\zeta| < 1$  et continue pour  $|\zeta| \leq 1$ .
- (ii)  $f(\zeta)$  est réel pour  $\zeta$  est réel et  $f(\zeta)$  est imaginaire pur pour  $\zeta$  est imaginaire pur.
- (iii)  $f(0) = 0$  et  $f'(0) > 0$ .
- (iv)  $f$  tracé  $A'B'$  selon la forme de la frontière libre donnée par (e).

Nous cherchons les écoulements qui ont  $\theta \geq 0$ , que nous appellerons les solutions en chute.

Pour  $f$  à satisfaire les conditions (i), (ii), et (iii) il est nécessaire et suffisant que  $f$  prend la forme :

$$f(\zeta) = \sum_0^{\infty} a_{2n+1} \zeta^{2n+1} \quad (3.2)$$

Là où  $a_1 > 0$ , chaque  $a_{2n+1}$  est réel, et  $\limsup |a_{2n+1}|^{1/(2n+1)} \leq 1$ .

Sur la frontière libre  $\zeta = e^{is}$ ,  $0 \leq s \leq \pi$ , on définit les fonctions réelles évaluées  $r$  et  $\phi$  par:

$$f(e^{is}) = e^{r(s)+i\phi(s)} \quad (3.3)$$

Depuis  $a_1 > 0$  et chacun  $a_{2n+1}$  est réel, il y a des nombres réels  $\{b_{2n}\}$  tel que:

$$r(s) + i[\phi(s) - s] = \sum_0^{\infty} b_{2n} e^{2nis}$$

La séparation entre la partie réelle et imaginaire donne :

$$\phi(s) - s = \sum_0^{\infty} b_{2n} \sin 2ns$$

et

$$r'(s) = -2 \sum_0^{\infty} n b_{2n} \sin 2ns.$$

Maintenant on peut définir:

$$L(s, t) = \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2ns \sin 2nt.$$

Il est facilement vérifié que:

$$\phi(s) = s - \int_0^{\pi} L(s, t) r'(t) dt. \quad (3.4)$$

Parce que la série de Fourier peut être intégrée terme à terme et les fonctions  $\{\sin 2nt\}$  sont orthogonales sur  $[0, \pi]$ .

Pour étudier la condition (iv), premièrement on va trouver l'expression pour  $dy/dx$  en termes de  $f$ . Le potentiel complexe  $w$  dans le plan  $\zeta$  correspondant à l'écoulement dans le plan  $z$  est obtenu par la transformation:

$$w = \frac{U_{\infty} h}{\pi} \log \frac{(\zeta^2 - \varepsilon^2)(\zeta^2 - \varepsilon^{-2})}{(\zeta^2 - \alpha^2)(\zeta^2 - \alpha^{-2})}.$$

Par conséquent, il suit cela

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{2U_{\infty} h (\alpha^2 + \alpha^{-2} - \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}) \zeta (\zeta^4 - 1)}{\pi (\zeta^2 - \varepsilon^2)(\zeta^2 - \varepsilon^{-2})(\zeta^2 - \alpha^2)(\zeta^2 - \alpha^{-2})}.$$

Puis, avec la règle chaîne  $dz/d\zeta = (dz/dw)(dw/d\zeta)$  et (3.1),

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{2h(\alpha^2 + \alpha^{-2} - \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}) \zeta (\zeta^4 - 1)}{\pi f^\gamma(\zeta) (\zeta^2 - \varepsilon^2) (\zeta^2 - \varepsilon^{-2}) (\zeta^2 - \alpha^2) (\zeta^2 - \alpha^{-2})}.$$

On pose  $\zeta = e^{is}$  et on égalé les parties imaginaires le résultat est :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{h}{3} h_\varepsilon(s) e^{-\gamma r(s)} \sin \gamma \phi(s). \quad (3.5)$$

Où

$$h_\varepsilon(s) = \frac{12(\alpha^2 + \alpha^{-2} - \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}) \sin 2s}{\pi(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} - 2 \cos 2s)(\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2 \cos 2s)}.$$

On note cela  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} h_\varepsilon(s) = h(s)$ , où

$$\begin{aligned} h(s) &= \frac{12(\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2) \sin 2s}{\pi(2 - 2 \cos 2s)(\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2 \cos 2s)} \\ &= \frac{6(\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2) \times 2 \cos s \sin s}{\pi(2 - 2 \cos^2 s)(\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2 \cos 2s)} \\ &= \frac{6(\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2) \cos s \sin s}{\pi(1 - \cos^2 s)(\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2 \cos 2s)} \end{aligned}$$

Alors

$$h(s) = \frac{6(\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2) \cot s}{\pi(\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2 \cos 2s)}$$

En outre,  $h_\varepsilon(s) \leq h(s)$ , et pour chaque  $\varepsilon$  il ya un nombre  $M_\varepsilon$  tel que  $h_\varepsilon(s) \leq M_\varepsilon$ .

Maintenant, en utilisant (3.1) et (3.5), la dérivé de (e) par rapport  $s$  prend la forme:

$$\gamma r'(s) e^{2\gamma r(s)} = -\frac{gh}{3U_\infty^2} h_\varepsilon(s) e^{-\gamma r(s)} \sin \gamma \phi(s).$$

De ce qu'il suit que la condition (iv) de f est équivalent à :

$$\begin{aligned} r'(s) &= -\frac{1}{3\gamma} h_\varepsilon(s) u(s) \left[ 1 + \int_s^\pi h_\varepsilon(\sigma) d\sigma \right]^{-1} \\ &= -\frac{1}{\gamma} F_\varepsilon[s.u(s)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Où

$$u(s) = c \sin \gamma \phi(s) \quad (3.7)$$

et  $c = gh/U_\infty^2$ , ce qui est la réciproque du nombre de Froude.

Par (3.4), (3.6), et (3.7), les conditions (i)-(iv) sur  $f$  impliquent:

$$u(s) = c \sin \left[ \gamma s + \int_0^\pi L(s, t) F_\varepsilon [t.u(t)] dt \right].$$

Pour les solutions en chute  $q_{B'}/q_{A'} \geq 1$ . De (3.1), (3.3), et (3.6), est suite que

$$\int_0^\pi h_\varepsilon(t)u(t)dt = (q_{B'}/q_{A'})^3 - 1.$$

On a maintenant capable d'interpréter le problème en termes d'un opérateur dans un espace de Banach.

**Théorème 3.2.1** *Pour une approximation finie de jet avec  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $c > 0$  et  $(q_{B'}/q_{A'})^3 - 1 \leq d$  pour obtenir une solution chute, il est nécessaire et suffisant que l'opérateur  $cK_\varepsilon$ ,  $K_\varepsilon$  est définie par :*

$$K_\varepsilon u(s) = \sin \left( \gamma s + \int_0^\pi L(s, t) F_\varepsilon [t.u(t)] dt \right)$$

Admet une point fixe  $u$  dans l'ensemble convexe:

$$\Omega_{d,\varepsilon} = \left\{ u \in \Omega [0, \pi] : 0 \leq u(s) \leq c \sin \gamma \pi, \int_0^\pi h_\varepsilon(t)u(t)dt \leq d \right\}$$

Et leur norme donnée par :

$$\|u\|_\Omega = \sup |u(s)|.$$

**Preuve.** La dérivation ci-dessus prouve que s'il ya un tel écoulement, alors le point fixe  $u$  doit exist. Il est suffisant de la prouver, nous supposons que le point fixe  $u$  existe.

Soit  $\phi$  est définie par :

$$\phi(s) = s + \frac{1}{\gamma} \int_0^\pi L(s, t) F_\varepsilon [t.u(t)] dt,$$

et soit  $r$  est définie par (3.6) et  $r(\pi) = 1$ . Noter que  $r$  ainsi définie est continue puisque  $h_\varepsilon u$  est intégrable.

Maintenant (3.4) des prises , et en renversant les étapes (3.2) à (3.4) nous trouvons qu'il ya les nombres réels  $\{a_{2n+1}\}$  tel que :

$$e^{r(s)+i\phi(s)} = \sum_1^{\infty} a_{2n+1} e^{(2n+1)is}.$$

Nous définissons  $f$  par (3.2) et procédons prouver qu'il satisfait des conditions (i)-(iv). Puisque les coefficients sont réels et les fonctions  $\{\sin(2n+1)s\}$  sont orthogonal,

$$a_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} e^{r(s)} \sin \phi(s) \sin(2n+1)s ds.$$

Puisque  $r$  est continue, les coefficients  $\{a_{2n+1}\}$  sont bornée, ainsi

$$\limsup |a_{2n+1}|^{1/(2n+1)} \leq 1.$$

Ainsi des conditions (i)-(iii) sur  $f$  sont satisfaites . Par (3.6) la condition (iv) est aussi satisfait.

Par (8) ,  $(q_{B'}/q_{A'})^3 - 1 \leq d$  ,et le théorème est prouvé.

Parce que  $h_{\varepsilon} \leq h$  nous ont le suivant. ■

**Corollaire 3.2.1** *Pour qu'une approximation finie de jet avec  $0 < \varepsilon < 1$  ,  $c > 0$  et  $(q_{B'}/q_{A'})^3 - 1 \leq d$  pour avoir une solution en chute, il est suffisant que l'opérateur  $cK_{\varepsilon}$  aient un point fixe  $u$  dans l'ensemble convexe*

$$\Omega_d = \Omega_{d,1}$$

## Conclusion générale

Ce travail s'inscrit dans le cadre des problèmes d'équations non linéaires, on a étudié l'existence de la solution d'un problème d'écoulement bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible, on a utilisé la méthode d'hodographe et la transformation de Schwarz-Christoffel pour trouver la solution analytique.

Enfin, on a trouvé que la méthode de transformation hodographique est plus efficace pour appliquer un problème bidimensionnel à problème unidimensionnel.



# Bibliographie

- [1] ALOUACHE HADJER, *transformation hodographique appliquée à un problème non-linéaire*, mémoire de master 2013 – 2014.
- [2] DOUMI NOURA, *etude d'un problème d'écoulement bidimensionnel et incompressible*, mémoire de master 2013 – 2014.
- [3] *Free surface flows, C5.6 Applied Complex Variables*, 2016, 3-1.
- [4] GORDON E. RITCHIE, *flow of an ideal fluid through a sluice gate*, mathematical analysis and applications 53, 471 – 483(1976).
- [5] M. BOURICH(ENSAM), *cours de mécanique des fluides*, université CADI AYYAD, deuxième édition 2014.
- [6] MERZAK DAMOU, *Mécanique des fluides*, office des publications universitaires place centrale de Ben-Aknoun (Alger) 1996.
- [7] MURRAY R. SPIEGEL, *variables complexes. Cours et problèmes*, Groupe Megraw-Hill, 1976.
- [8] PHILIPPE FICHOU, *mécanique des fluides*, 2001 – 2002.
- [9] RIADH BEN HAMOUDA, *notions de mécanique des fluides. Cours et exercices corrigés*, centre de publication universitaire, tunis 2008.
- [10] ROBERT G. OWENS, *Mat6150. mécanique des fluides*, 2014.
- [11] SYLVIE BENZONI ET FRANCAIS FILBERT, *cours de mathématique pour la licence. Analyse Complexe*, 2007.