

Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont encouragé et soutenu moralement et matériellement pendant les moments les plus difficiles et durant toute ma vie ,et qui me sont les plus chères sur cette planète : mon père et ma mère (**Belkasem.Nouara**).*

A mes très chers frères

A les épouses de mes frères et leurs enfants

A mes très chers soeurs

A les paires de mes soeurs et leurs enfants

A son oublier mon binôme

A toute ma grande famille

A mes chers grands-parents

A tous mes oncles et tantes

A tous mes amies

A tous ceux que j'aime

A tous les étudiants de ma promotion

Avec l'expression de tous mes sentiments de respect,

Je dédie ce mémoire.

Amina

Remerciements

C'est avec un grand honneur et beaucoup de plaisir que nous ponctuons nos études en mathématique au sein de l'université de M'sila MOHAMED BOUDIAF par ce Modeste travail.

*Pour cela nous tenons à exprimer nos sincères remerciements et notre profonde gratitude à notre encadreur monsieur **ABDELKADER GASSMI** pour toutes les orientations et les conseils qu'il nous a prodigué tout le long de ce travail*

Nos remerciements s'adressent également à l'ensemble des enseignants de la faculté de mathématique et informatique

Merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin dans l'achèvement de ce travail ; à tous ceux qui nous ont transmis de leur savoir.

Merci pour tout

Table des matières

Introduction	1
1 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides	3
1.1 Introduction	3
1.2 Description du mouvement	3
1.2.1 Description Eulérienne	3
1.2.2 Description Lagrangienne	4
1.3 Définition	5
1.3.1 Fluide	5
1.3.2 Fluide parfait	5
1.3.3 Fluide incompressible	6
1.3.4 Ligne de courant	6
1.3.5 Les trajectoires	8
1.3.6 Ecoulement permanent	9
1.4 Propriétés physique des fluide	9
1.4.1 Masse volumique	9
1.4.2 Densité	10
1.4.3 Viscosité	10
1.5 Equation du mouvement	10
1.5.1 Equation de continuité	10
1.5.2 Equations d'Euler	12
1.5.3 Equation de Bernoulli	14

1.6	Fonction analytique(holomorphe)	16
1.7	Transformation conforme	17
1.8	Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe	17
2	Traitement analytique du problème	19
2.1	Introduction	19
2.2	Représentation conforme	19
2.2.1	TRANSFORMATIONS OU REPRESENTATIONS	19
2.2.2	REPRESENTATION CONFORME	20
2.3	Quelque transformations conformes	21
2.3.1	LA TRANSFORMATION DE SCHWARZ - CHRISTOFFEL	21
2.3.2	Transformation d'hodograph	23
2.4	Position du problème	24
2.5	Solution analytique	26
2.5.1	Première étape	26
2.5.2	Deuxième étape	29
3	Traitement numérique du problème	35
3.1	Introduction	35
3.2	Formulation du problème	35
3.3	Solution Numérique	37
3.3.1	Première étape	37
3.3.2	la deuxième étape	39
	Conclusion	44
	Bibliographie	45

Introduction

Les écoulements à surface libre de type jet sont présents dans beaucoup d'applications industrielles et urbaines : les chambres de combustion des moteurs, les pompes à jet, les réservoirs et l'architecture des barrages. Compte tenu de son importance pratique, ce type d'écoulement fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques, expérimentales et numériques.

On d'étudier un écoulement à surface libre supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables $(x; y)$ de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$: En négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme d'hodographe dû à Kirchhoff (1869) et la transformation Schwarz-Christoffel. Et on résoud le problème numériquement après on cherche une solution asymptotique en considérant les paramètres du problème.

Le présente mémoire comporte trois chapitres.

Après cette brève introduction, nous abordons dans le premier chapitre, on traite des notions fondamentales sur les propriétés en mécanique des fluides telles que les Mouvements sur les deux méthodes : la méthode Lagrangienne et la méthode Eulérienne, et quelque équations de la mécanique des fluides (continuité, Bernoulli,...etc) et on définie aussi les notions de potentiel complexe et de vitesse complexe .

Dans le le deuxième chapitre, on a étudié les transformations conformes en générale, en citant quelques cas particuliers, tels que la transformation de Schwarz-Christoffel et la méthode de la ligne de courant libre. Et on traite le problème dans le cas où la tension de surface est négligée. Dans ce cas, la solution exacte peut être calculée explicitement en utilisant la transformation de Schwarz-Christoffel.

Dans le dernier chapitre du mémoire on étudie le même problème posé dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique la solution du problème considéré en utilisant la méthode d'équation intégrale aux limites. L'idée est de reformuler le problème en tant que système d'équations integro-différentielles qui ne comporte que des inconnues à la limite du domaine d'écoulement. Ce système est alors discrétisé et les équations algébriques résultantes sont résolues par itération (habituellement l'itération de Newton).

Enfin, on présent une conclusion de notre travaille.

Chapitre 1

Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente les concepts de base de la mécanique des fluides: propriétés des fluides, équations fondamentales du mouvement des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux.

1.2 Description du mouvement

1.2.1 Description Eulérienne

Au lieu de s'attacher à suivre les particules fluides dans leur mouvement, on choisit dans cette description de déterminer à partir des lois fondamentales la vitesse $U_t(x, t)$ et les variables caractéristiques en tout point géométrique M et à chaque instant t . Toute grandeur β est donc un champ de la forme

$$\beta = b(x, t).$$

Le site M est occupé par différentes particules à différentes valeurs du temps et le calcul des trajectoires ne constitue plus un des éléments déterminants du problème.

Cette approche est de loin la plus répandue en mécanique des fluides. la loi de comportement des fluides newtoniens s'exprime de façon relativement simple en coordonnées Eulériennes.

1.2.2 Description Lagrangienne

Le formalisme Lagrangien consiste à déterminer les trajectoires des particules et leurs propriétés caractéristiques en fonction du temps et de leur position initiale à l'instant $t = t_0$. Si X dénote le vecteur position de chaque particule M_0 à l'instant initial $t = t_0$, il s'agit, en appliquant les lois de conservation, de trouver la position M de cette même particule

$$x = \phi(X, t) ,$$

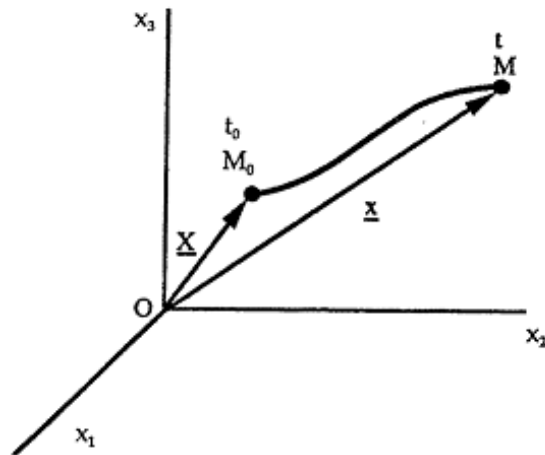


Figure 1.1 : Trajectoire

à un instant quelconque t . Les variables (pression, masse volumique, température, etc) associées à chaque particule sont alors considérées comme des fonctions de X et de t . Ainsi, toute grandeur β caractéristique de l'état du fluide est de la forme

$$\beta = B(X, t),$$

et le vecteur vitesse est tout simplement

$$U(X, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(X, t).$$

1.3 Définition

1.3.1 Fluide

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler.

1.3.2 Fluide parfait

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée Σ fictive ou non.

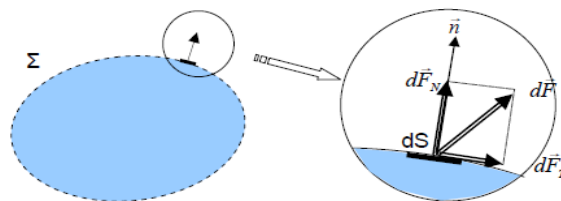


Figure 1.2

Considérons $d\vec{F}$ la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire dS de normale \vec{n} entre le fluide et le milieu extérieur.

On peut toujours décomposer $d\vec{F}$ en deux composantes:

- une composante $d\vec{F}_T$ tangentielle à dS .
- une composante $d\vec{F}_N$ normale à dS .

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante $d\vec{F}_T$ est nulle. Autrement dit, la force $d\vec{F}$ est normale à l'élément de surface dS .

1.3.3 Fluide incompressible

Le fluide est incompressible lorsque sa masse volumique est invariable:

$$\rho = cte.$$

1.3.4 Ligne de courant

On appelle ligne de courant la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente au vecteur vitesse local du champ de l'écoulement. Son équation différentielle s'écrit:

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \text{ à } t \text{ fixé,}$$

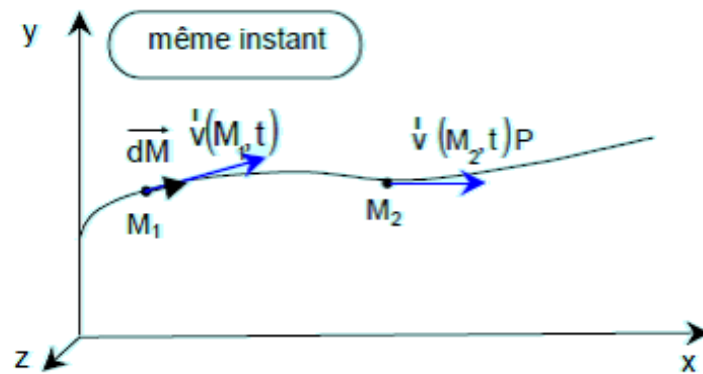


Figure 1.3: ligne de courant à l'instant t «Photo instantanée de l'écoulement »

soit deux équations à trois variables (x, y, z) .

En effet, pour un déplacement dM infiniment petit du point M sur une ligne de courant, on peut écrire:

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{dM} = 0.$$

Ce qui s'écrit scalairement:

$$vdz - wdy = 0$$

$$wdx - udz = 0$$

$$udy - vdx = 0$$

Posant la valeur commune du rapport de l'équation différentielle encadrée égale à d_α , α désignant un réel quelconque, les équations paramétriques des lignes de courant passant, à tout instant, par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pour $\alpha = 0$ s'écrivent sous la forme:

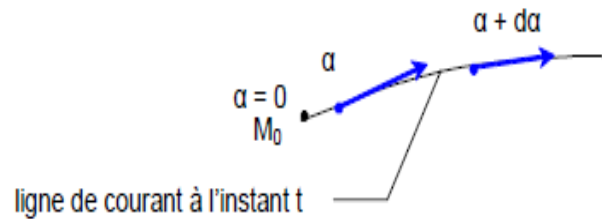


Figure 1.4

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t, \alpha)$$

$$y = y(x_0, y_0, z_0, t, \alpha)$$

$$z = z(x_0, y_0, z_0, t, \alpha)$$

Les lignes de courant constituent ainsi une famille de courbes à deux paramètres; elles varient dans l'espace (à travers le paramètre géométrique α) et dans le temps (par la variable temporelle t).

1.3.5 Les trajectoires

On appelle trajectoire la courbe décrite au cours du temps par une particule de fluide quelconque du champ de l'écoulement.

En comparant avec les lignes de courant, comme l'illustre la figure 1.5, il apparaît que la ligne de courant est relative à un même instant mais regroupe des particules différentes alors que la trajectoire, qui réfère à une même particule, est une courbe paramétrée en temps. Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont définies par:

$$\frac{dx}{dt} = u_x(x, y, z, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = u_y(x, y, z, t),$$

$$\frac{dz}{dt} = u_z(x, y, z, t).$$

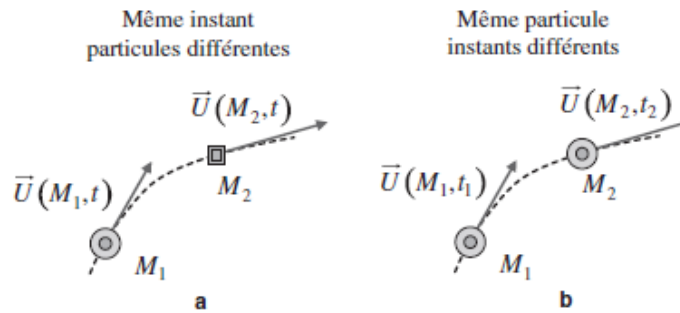


Figure 1.5: Comparaisons des (a) lignes de courant et (b) trajectoires.

1.3.6 Écoulement permanent

Un écoulement est dit permanent (ou stationnaire) lorsque toutes les grandeurs caractéristiques du mouvement sont invariables dans le temps (vitesse, masse volumique, pression, température, etc), ce qui se traduit symboliquement par:

$$\text{Mouvement permanent} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

1.4 Propriétés physique des fluide

1.4.1 Masse volumique

la masse volumique d'un corps est le rapport entre la masse et le volume

$$\rho = \frac{m}{v}.$$

1.4.2 Densité

$$d = \frac{\text{masse volumique de fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

Dans le cas des liquides on prendra l'eau comme fluide de référence.

1.4.3 Viscosité

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. C'est à dire, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. Elle peut être mesurée par un viscosimètre à chute de bille, dans lequel on mesure le temps écoulé pour la chute d'une bille dans le fluide. Elle peut également être mesurée par un récipient dont le fond comporte un orifice de taille standardisée. La vitesse à laquelle le fluide s'écoule par cet orifice permet de déterminer la viscosité du fluide.

La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes.

1.5 Equation du mouvement

1.5.1 Equation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse: la variation de masse pendant un temps dt d'un élément de volume fluide doit être égale à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle du fluide sortant.

On considère un élément de volume fixe de fluide: $dV = dxdydz$.

Sa masse peut s'exprimer comme: ρdV .

La variation de cette masse pendant dt s'écrit: $dm = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt$.

Cette variation doit alors être égale à la somme des masses de fluide qui entrent et sortent par les six faces de l'élément de volume dV .

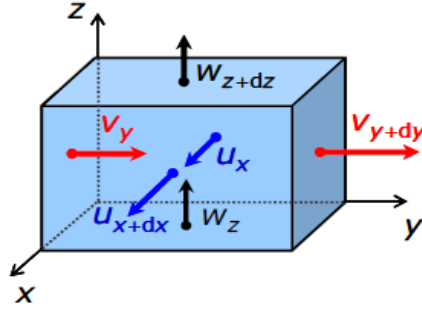


Figure 1.6

Suivant l'axe y , le fluide entre avec la vitesse v_y et sort avec la vitesse v_{y+dy} . Par conséquent, la masse entrant pendant le temps dt s'exprime par $(\rho v dx dz dt)_y$ et la masse sortant par $(\rho v dx dz dt)_{y+dy}$.

Le bilan sur l'axe y donne: $[(\rho v)_y - (\rho v)_{y+dy}] dx dz dt$. Un développement au premier ordre permet d'écrire:

$$(\rho v)_{y+dy} = (\rho v)_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy$$

Il reste alors: $-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dx dz dt$ suivant l'axe y .

Par analogie sur les deux autres axes, on trouve:

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt \text{ suivant l'axe } x, \text{ et}$$

$$-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz dx dy dt \text{ suivant l'axe } z.$$

Au total, à travers les six faces on a, puisque $dx dy dz = dV$:

$$-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dV dt.$$

La conservation de la masse du volume dV s'écrit donc:

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dV dt.$$

Soit l'équation de continuité qui traduit le principe de conservation de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \quad (1.1)$$

1.5.2 Equations d'Euler

Les différentes forces qui agissent sur un élément de fluide en mouvement se ramènent à:

- des forces extérieures (forces de volume) ;
- des forces de pression (forces de surface) ;
- des forces d'inertie.

Cet ensemble de forces satisfait à l'équation générale de la mécanique:

$$\sum \vec{F} = m\gamma$$

C'est-à-dire, si X, Y, Z sont les composantes, suivant les trois axes, de la force de volume \vec{F} par unité de masse:

$$\gamma_X = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\gamma_Y = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\gamma_Z = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\vec{\gamma} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

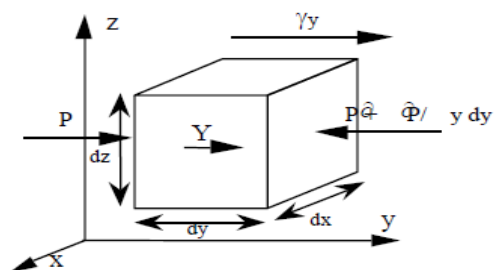


Figure 1.7

L'équilibre suivant l'axe des y d'un élément de volume parallélépipédique s'établit ainsi:

- force extérieure:

$$Y \rho dx dy dz$$

- force de pression:

$$\rho dx dz - \left[p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right] dx dz$$

- force d'inertie:

$$\gamma_y \rho dx dy dz$$

$$\sum \vec{f} = m \vec{\gamma} \Rightarrow \gamma_y \rho dx dy dz = Y \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz,$$

$$\gamma_y = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Soit \vec{V} la vitesse d'une particule fluide; ses composantes u, v, w dépendent du temps et de la position de la particule.

On a donc:

$$\gamma_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad u = \frac{dx}{dt}$$

$$\gamma_x = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

On aurait des formulations analogues suivant les autres axes, ce qui donne la relation :

$$\gamma \left[\begin{array}{l} g_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ g_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ g_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \end{array} \right]$$

soit sous forme vectorielle:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}V^2} + \overrightarrow{\text{rot}V} \wedge \vec{V}. \quad (1.2)$$

1.5.3 Equation de Bernoulli

le théorème de bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluide en mouvement. un certain travail est fourni au fluide lorsqu'il passe d'un point à un autre et ce travail est égal à la variation d'énergie mécanique.

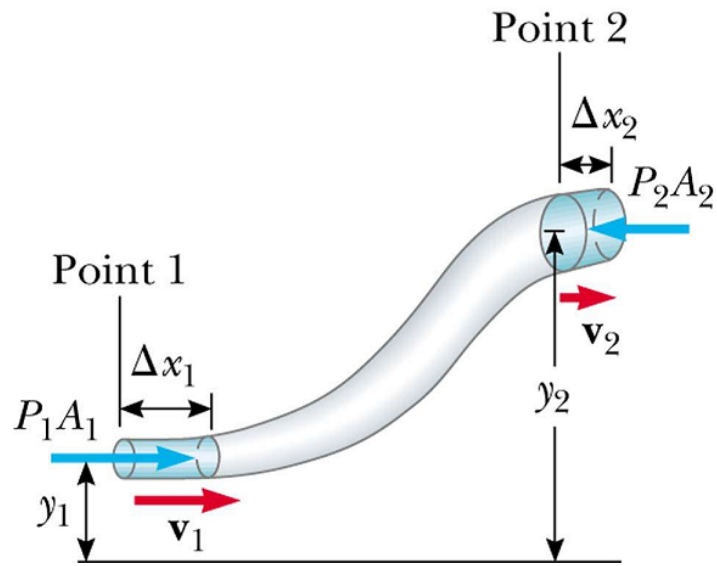


Figure 1.6: Tube de courant

$$W = \Delta E_c + \Delta E_p$$

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \frac{1}{2} M v_2^2 - \frac{1}{2} M v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho V v_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= M g y_2 - M g y_1 \\ &= \rho V g y_2 - \rho V g y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W &= F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 \\
&= p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 \\
&= p_1 V - p_2 V
\end{aligned}$$

On obtient alors:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1.$$

La somme de la pression et de l'énergie mécanique par unité de volume reste constante tout au long du tube de courant. C'est le théorème de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = cte. \quad (1.3)$$

1.6 Fonction analytique(holomorphe)

Soit f une fonction qui admet une dérivé, ses parties réels et imaginaire sont différentiable et y vérifient les conditions de cauchy Reimann définissant ainsi une fonction analytique, est holomorphe.

une fonction holomorphe peut être considérée comme une transformation

$$(z) \longrightarrow (\zeta)$$

$$z \xrightarrow{f} \zeta = f(z) \text{ avec } \zeta = \xi + iv \quad (1.4)$$

$f(z)$, holomorphe dans D , est une transformation conforme si $f'(z) \neq 0$ dans D ces conditions, cette transformation est localement une similitude de rapport égal à $f'(z_0)$ et d'angle de rotation $\arg(f'(z_0))$ au point considéré z_0 .

Théorème 1.6.1 (cauchy 1) :

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et γ un chemin fermé contenue ainsi que son intérieur dans D , alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (1.5)$$

Théorème 1.6.2 (cauchy 2) :

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et γ un chemin fermé contenue ainsi que son intérieur dans D , alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 \quad (1.6)$$

Théorème 1.6.3 (théorème de résidus)

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D à l'exception de singularités isolées, soit C un chemin fermé contenue ainsi que son intérieur dans ne passant par aucune des singularités de f et en contenant un nombre définie z_1, z_2, \dots, z_n dans son intérieure, alors

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f, z_k) \quad (1.7)$$

le chemin C : étant parcouru dans le sens positif.

1.7 Transformation conforme

Définition 1.7.1 Soient U et V deux ouverts de \mathbb{C} . On dit qu'une fonction holomorphe f de U dans V est une transformation conforme si elle est bijective.

Définition 1.7.2 On dit que f est une transformation anticonforme si c'est la conjuguée d'une transformation conforme.

1.8 Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe

On appelle potentiel complexe la fonction $f(z) = \varphi(x; y) + i\psi(x; y)$ ou $z = x + iy$ est la variable complexe associée à la fonction potentiel complexe $f(z)$ (φ et ψ reprennent respectivement les fonctions potentiel et de courant).

La fonction f a les propriétés suivantes:

- $f(z)$ est une fonction uniforme, c'est-à-dire qu'à une valeur de z correspond une seule valeur de f .
- $f(z)$ est une fonction analytique, il faut que sa dérivée soit définie partout, c'est-à-dire

$$\frac{df}{dz} = \frac{d\varphi}{dx} + i\frac{d\psi}{dx} = -i\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dy} \implies \begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} = u \\ \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{d\psi}{dx} = v \end{cases}$$

Ce système d'équations constitue les relations de Cauchy-Riemann qui vérifient bien les relations trouvées précédemment.

Chapitre 2

Traitement analytique du problème

2.1 Introduction

L'objectif dans ce chapitre, est l'étude d'écoulement bidimensionnel de type jet a un surface libre, en négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme d'hodographe du à Kirchhoff (1869) et la transformtion de Schwarz-Christoffel.

2.2 Représentation conforme

2.2.1 TRANSFORMATIONS OU REPRESENTATIONS

L'ensemble des équations

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

définit en général une transformation ou une représentation, qui établit une correspondance entre les points du plan des uv et les points du plan des xy . Les équations 2.1 sont appelées équations de la transformation. Si à chaque point du plan des uv correspond un point et un seul du plan des xy on parlera d'une transformation biunivoque. Dans un tel cas un ensemble de points du plan des xy [tel qu'une courbe ou un ouvert connexe] est appliqué sur un ensemble de points du plan des uv [courbe ou ouvert connexe] et réciproquement.

Les ensembles de points qui se correspondent ainsi dans les deux plans sont souvent dits images l'un de l'autre.

2.2.2 REPRESENTATION CONFORME

Supposons que par 2.1 le point (x_0, y_0) du plan des xy soit transformé en le point (u_0, v_0) du plan des uv [Fig. 2.1 et 2.2] cependant que les courbes C_1 et C_2 , [se coupant en (x_0, y_0)] sont respectivement transformées en C'_1 et C'_2 [se coupant en (u_0, v_0)]. Une transformation telle que l'angle entre C_1 et C_2 , en (x_0, y_0) est égal en grandeur et sens, à l'angle entre C'_1 et C'_2 en (u_0, v_0) , est dite conforme en (x_0, y_0) . Une transformation qui conserve les angles en grandeur mais pas nécessairement en sens, est dite isogonale.

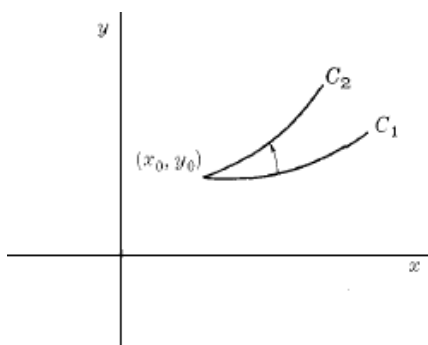
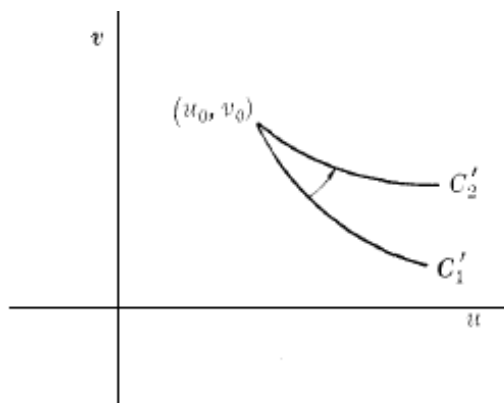


Figure 2.1: le plan de xy

figure 2.2: plan de uv

2.3 Quelques transformations conformes

2.3.1 LA TRANSFORMATION DE SCHWARZ - CHRISTOFFEL

Considérons un polygone [Fig. 2.3] dans le plan des w , ayant pour sommets w_1, w_2, \dots, w_n , et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soit w_1, w_2, \dots, w_n , les points correspondant respectivement à x_1, x_2, \dots, x_n , de l'axe réel du plan des z [Fig. 2.4].

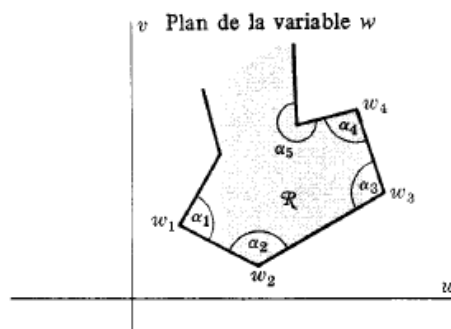


Figure 2.3: plan de la variable w

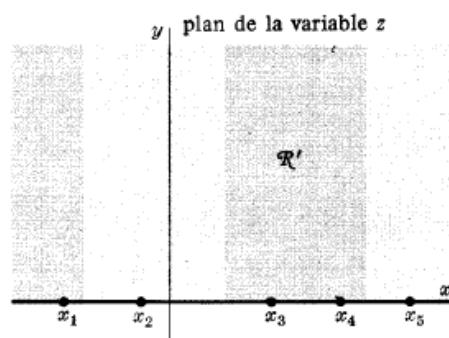


Figure 2.4: plan de la variable z

Une transformation qui représente l'intérieur \mathfrak{R} du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des z , et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donnée par

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1} \quad (2.2)$$

ou

$$w = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1} dz + B \quad (2.3)$$

où A et B sont des constantes complexes.

On notera que

1. Parmi les points x_1, x_2, \dots, x_n , on peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple x_n , à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de 2.2 et 2.3 n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones fermés.

2.3.2 Transformation d'hodographe

Cette transformation est utilisée par Kirchhoff 1986 pour trouver la solution exacte de problèmes d'écoulements potentiels et bidimensionnels, partiellement bornée par les parois rigides et rectilignes et d'autres parties par lignes de courant libres, sur lesquelles la pression est supposée constante. L'idée de base de cette transformation est l'introduction de la variable complexe Ω définie par:

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u-iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta \quad (2.4)$$

ou $z = x + iy$, $f = \varphi + i\psi$, $\frac{df}{dz} = u - iv$ et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ avec (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse V , θ est l'angle que forme le vecteur vitesse avec l'horizontale.

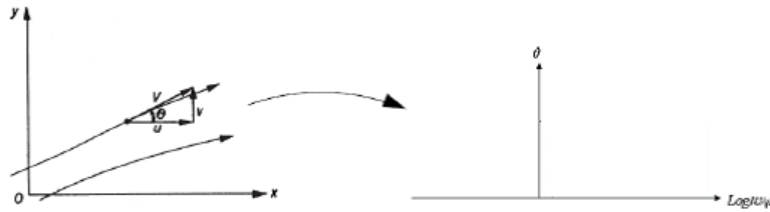


Figure 2.5: transformation d'hodographe

On remarque que La fonction Ω possède de simples propriétés suivantes:

- La partie réelle de Ω est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e. $\log\left(\frac{U}{q}\right) = \text{const.}$
- La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e. $\theta = \text{const.}$

Par conséquent, l'écoulement est représenté par une figure plane de cotés rectilignes (polygone). C'est aussi le cas de la transformation f , qui transforme le plan physique z en polygone. Il est évident que, si nous pouvons transformer le plan Ω vers la moitié supérieure (resp. inférieure) d'un autre plan d'une certaine variable complexe, alors la relation entre z et f ou entre df/dz et f est paramétriquement déterminées.

2.4 Position du problème

On suppose un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, à surface libre, où l'effet de gravité et tension de surface sont négligés.

On rappelle que ces écoulements peuvent être décrites par un potentiel complexes.

$$F(z) = \varphi + i\psi \quad (2.5)$$

Où φ et ψ sont la vitesse et fonction potentiels, et les composantes de vitesse sont alors donné par:

$$u - iv = \frac{dF}{dz}. \quad (2.6)$$

l'écoulement est constant, délimité par des parois rigides, et en partie par des lignes de courant libres de forme inconnue sur lesquelles la pression prend une valeur constante connue. Par exemple, les surface libres peuvent correspondre à l'interface d'un liquide à l'atmosphère, auquel cas la pression constante correspondrait à celle de l'atmosphère. Selon le théorème de Bernoulli, (1.3), la vitesse du fluide est constante sur une surface libre.

Par d'exemple de l'application de la théorie de la lignes de courant, calculons la Rapport de contraction d'un jet bidimensionnel de liquide sortant d'un orifice. Supposons que l'orifice est une fente mince et longue dans une paroi plane de faible épaisseur et que le mur fait partie d'un grand vaisseau contenant du liquide. La vitesse du liquide sur les lignes de rayonnement libres qui émergent des bords de l'orifice est uniforme et égale à v , disons. C'est aussi la vitesse de l'intérieur du jet en aval de l'orifice, où (négligeant les effets de la gravité), les raides sont droites et parallèles. (Voir la figure 2.6). Laissez les deux lignes de courant délimiter le débit, sur leque $\psi = +\psi_1$ et $\psi = -\psi_1$, Dire-être ABC et $A'B'C'$, respectivement, où A, A', C , et C' Tous représentent des points à l'infini. La figure 2.6 montre la ligne droite correspondante Limites dans les plans F et Ω , où Ω est maintenant défini de manière plus pratique Manière comme

$$\Omega = \ln\left(V \frac{dz}{dF}\right) = \ln\left(\frac{u}{v}\right) + i\theta \quad (2.7)$$

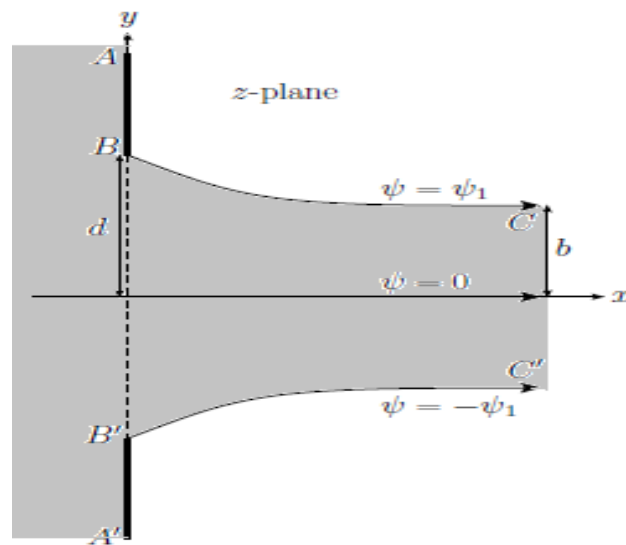


Figure 2.6:jet libre

2.5 Solution analytique

2.5.1 Première étape

Dans cette étape on utilise quelques transformations définies pour reformuler le problème posé on effectue :

le potentiel plane est donc comme illustré à la [figure 2.7] et qui en représente aussi dans [tableau 2.1].

les points	plan Z	plan F
A'	$x = 0, y = -\infty$	$\phi = -\infty, \psi = -\psi_1$
B'	$x = 0, y = -d$	$\phi = 0, \psi = -\psi_1$
C'	$x = \infty, y = -b$	$\phi = +\infty, \psi = -\psi_1$
A	$x = 0, y = \infty$	$\phi = -\infty, \psi = \psi_1$
B	$x = 0, y = d$	$\phi = 0, \psi = \psi_1$
C	$x = \infty, y = b$	$\phi = +\infty, \psi = \psi_1$

tableau 2.1: Représentation des points du plan Z sur le plan F

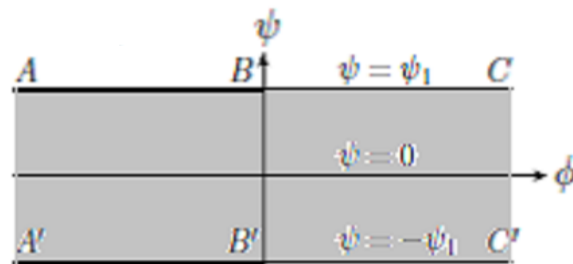
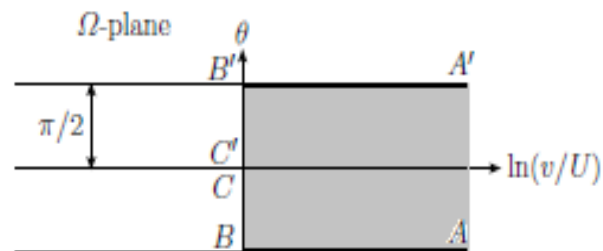


Figure 2.7: le plan F

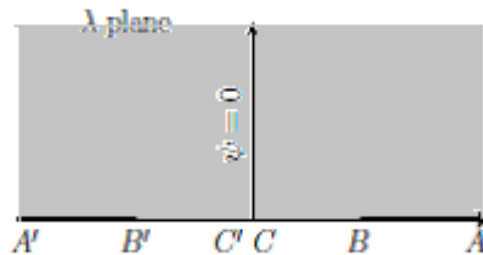
Les plans hodographes est donc comme illustré à la [figure 2.8] et qui en représente aussi dans [tableau 2.2].

les points	plan z	plan Ω
A'	$x = 0, y = -\infty$	$\ln(v/U) = \infty, \theta = i\frac{\pi}{2}$
B'	$x = 0, y = -d$	$\ln(v/U) = 0, \theta = i\frac{\pi}{2}$
C'	$x = \infty, y = -b$	$\ln(v/U) = 0, \theta = 0$
A	$x = 0, y = \infty$	$\ln(v/U) = \infty, \theta = -i\frac{\pi}{2}$
B	$x = 0, y = d$	$\ln(v/U) = 0, \theta = -i\frac{\pi}{2}$
C	$x = \infty, y = b$	$\ln(v/U) = 0, \theta = 0$

tableau 2.2: Représentation des points du plan Z sur le plan Ω Figure 2.8: le plan Ω

On transforme maintenant les plans hodographe et potentiel à la demi-plan supérieure illustré la [figure 2.9] et qui représente aussi dans [tableau 2.3].

les points	plan F	plan Ω	plan λ
A'	$\phi = -\infty, \psi = -\psi_1$	$\ln(v/U) = \infty, \theta = i\frac{\pi}{2}$	$\zeta = -\infty, \eta = 0$
B'	$\phi = +\infty, \psi = -\psi_1$	$\ln(v/U) = 0, \theta = i\frac{\pi}{2}$	$\zeta = -1, \eta = 0$
C'	$\phi = +\infty, \psi = -\psi_1$	$\ln(v/U) = 0, \theta = 0$	$\zeta = 0, \eta = 0$
A	$\phi = -\infty, \psi = \psi_1$	$\ln(v/U) = \infty, \theta = -i\frac{\pi}{2}$	$\zeta = \infty, \eta = 0$
B	$\phi = 0, \psi = \psi_1$	$\ln(v/U) = 0, \theta = -i\frac{\pi}{2}$	$\zeta = 1, \eta = 0$
C	$\phi = +\infty, \psi = \psi_1$	$\ln(v/U) = 0, \theta = 0$	$\zeta = 0, \eta = 0$

tableau 2.3: Représentation des points du plan F et Ω sur le demi-plan supérieure λ Figure 2.9: le plan λ

2.5.2 Deuxième étape

Pour trouver la solution analytique on utilise une transformation de Schwarz-Christoffel pour transformer chacun des polygones à un même polygone d'un nouvel espace que l'on va appeler λ . Il reste donc à déterminer les changements de variable $\lambda(\Omega)$ et $\lambda(F)$ à effectuer.

Une fois que cela est fait, on cherche la relation qui existe entre Ω et F ; on s'attend à trouver une équation différentielle que l'on va résoudre.

1. Transformation $\lambda(F)$

Ensuite, nous devons cartographier la bande infinie $ABCA'B'C'$ Dans le plan F vers la moitié supérieure du plan λ . La transformation conforme d'une bande semi-infinie sur la moitié supérieure d'un autre plan complexe.

la transformation de schwarz cristoffel donne:

$$\begin{aligned} F &= \alpha \int (\lambda - 1)^{\frac{\pi}{\pi}-1} (\lambda + 1)^{\frac{\pi}{\pi}-1} (\lambda - 0)^{\frac{0}{\pi}-1} d\lambda \\ &= \alpha \int (\lambda)^{-1} d\lambda \end{aligned}$$

$$F = \alpha \ln(\lambda) + \beta \tag{2.8}$$

Pour déterminer les constantes α et β , on utilise en particulier, cette transformation mappe les points $B' = -i\psi_1$ et $B = i\psi_1$ dans le plan F vers les points $B = 1$ et $B' = -1$, respectivement, Dans le plan λ .

$$\begin{cases} -i\psi_1 = \alpha \ln(-1) + \beta \\ i\psi_1 = \alpha \ln(1) + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -i\psi_1 = 2\alpha \ln(i) + \beta \\ \beta = i\psi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{2\psi_1}{\pi} \\ \beta = i\psi_1 \end{cases}$$

donc en remplace dans 2.8 on obtient:

$$F = -\frac{2\psi_1}{\pi} \log(\lambda) + i\psi_1$$

$$-\frac{F\pi}{2\psi_1} = \log(\lambda) - i\frac{\psi_1\pi}{2\psi_1}$$

$$-\frac{F\pi}{2\psi_1} = \log(\lambda) - \log(e^{i\frac{\pi}{2}})$$

$$-\frac{F\pi}{2\psi_1} = \log\left(\frac{\lambda}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) = \log\left(\frac{\lambda}{i}\right)$$

donc

$$\lambda = i \exp\left(-\frac{\pi F}{2\psi_1}\right). \quad (2.9)$$

2. Transformation $\lambda(\Omega)$

nous devons cartographier la bande infinie $ABCA'B'C'$ Dans le plan Ω vers la moitié supérieure du plan λ . La transformation conforme d'une bande semi-infinie sur la moitié supérieure d'un autre plan complexe.

la transformation de schwarz cristoffel donne:

$$\begin{aligned} \Omega &= \alpha \int (\lambda - 1)^{\frac{\frac{\pi}{2}-1}{\pi}} (\lambda + 1)^{\frac{\frac{\pi}{2}-1}{\pi}} d\lambda \\ &= \alpha \int (\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}} (\lambda + 1)^{-\frac{1}{2}} d\lambda \\ &= \frac{\alpha}{i} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} d\lambda \\ \Omega &= -i\alpha \arcsin(\lambda) + \beta \end{aligned}$$

En particulier, cette transformation mappe les points $B' = i\pi/2$ et $B = -i\pi/2$ Dans le plan Ω vers les points $B = 1$ et $B' = -1$, respectivement, Dans le plan λ .

d'où on trouve $\alpha = 1, \beta = -i\pi/2$.

Alors, on aura:

$$\lambda(\Omega) = \cosh\left[\left(\Omega + i\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\lambda = i \sinh \Omega. \quad (2.10)$$

3. Relation entre $\Omega(F)$ et $F(Z)$

En égalant les deux expressions de, on tire:

$$\lambda = i \exp\left(-\frac{\pi F}{2 \psi_1}\right) = i \sinh \Omega. \quad (2.11)$$

On a $\Omega = \ln V \frac{dZ}{dF}$ et en utilisant la définition du *sinh* Nous trouvons:

$$\begin{aligned} \lambda &= i \sinh \Omega = i \sinh\left(\ln V \frac{dZ}{dF}\right) \\ &= \frac{i}{2} \left[\exp\left(\ln V \frac{dZ}{dF}\right) - \exp\left(-\ln V \frac{dZ}{dF}\right) \right] \\ &= \frac{i}{2} \left(V \frac{dZ}{dF} - \frac{1}{V} \frac{dF}{dZ} \right). \end{aligned}$$

Alors $\lambda = \frac{i}{2}(V Z' - (V Z')^{-1})$ et pour résoudre cette équation on pose $V Z' = X$:

$$\lambda = \frac{i}{2}(X - X^{-1}),$$

$$2\lambda = i(X - X^{-1}),$$

$$X^2 - 2\frac{\lambda}{i}X - 1 = 0.$$

Donc la solution s'écrit:

$$X = V \frac{dZ}{dF} = -i\lambda \pm (1 - \lambda^2)^{1/2}. \quad (2.12)$$

Dont seule la branche avec + est physiquement possible. En se servant de la relation

$$d\lambda = -\frac{i \pi}{2 \psi_1} \lambda dF,$$

et

$$V \frac{dZ}{dF} = -i\lambda + (1 - \lambda^2)^{1/2}. \quad (2.13)$$

Où, avec des coupes dans le plan Z à AB et $A'B'$, la branche correcte de $(1 - \lambda^2)^{1/2}$ Est-ce qui est réel et positif quand $\psi = 0$. L'intégration, à l'aide de l'équation 2.9, des rendements

$$\frac{\pi}{2} \frac{V}{\psi_1} (Z - Z_1) = i(\lambda - 1) - (1 - \lambda^2)^{1/2} + \tanh^{-1}[(1 - \lambda^2)^{1/2}]$$

Où Z_1 est une constante. Cependant, $\lambda = 1$ au point B , où $z = id$ ($2d$ étant le Largeur de l'orifice), donc $Z_1 = id$, et

$$\frac{\pi}{2} \frac{V}{\psi_1} (Z - id) = i(\lambda - 1) - (1 - \lambda^2)^{1/2} + \tanh^{-1}[(1 - \lambda^2)^{1/2}] \quad (2.14)$$

$$Z = \frac{2}{\pi} \frac{\psi_1}{V} [i(\lambda - 1) + \frac{\pi}{2} \frac{V}{\psi_1} d] - (1 - \lambda^2)^{1/2} + \tanh^{-1}[(1 - \lambda^2)^{1/2}]$$

$$Z = -\frac{2}{\pi} \frac{\psi_1}{V} ((1 - \lambda^2)^{1/2} - \tanh^{-1}[(1 - \lambda^2)^{1/2}]) + i(\frac{2}{\pi} \frac{\psi_1}{V} (\lambda - 1) + d)$$

Enfin, la relation requise entre Z est F obtenue en éliminant λ entre les équations 2.9 et 2.14.

Sur la surface libre BC , nous avons

$$\psi = \psi_1, \quad \phi = Us, \quad \Omega = i\theta.$$

Où s désigne la distance mesurée le long de la ligne de calcul de B . Il résulte de Les équations 2.10 et 2.9 que

$$\lambda = -\sin \theta = \exp(-\frac{\pi}{2} \frac{V}{\psi_1} s).$$

Ainsi, en utilisant l'équation 2.14, l'équation de rationalisation BC peut être écrite, sous forme paramétrique, comme

$$x = \frac{2}{\pi} \frac{\psi_1}{V} [\tanh^{-1}(\cos \theta) - \cos \theta], \quad (2.15)$$

$$y = d - \frac{2}{\pi} \frac{\psi_1}{V} (1 + \sin \theta). \quad (2.16)$$

Ainsi, la demi-largeur asymptotique du jet est

$$b = \lim_{s \rightarrow \infty} y(s) = d - \frac{2\psi_1}{\pi V}. \quad (2.17)$$

Loin de l'orifice, qui correspond à $\lambda \rightarrow \infty$, l'équation 2.13 produit

$$\frac{dF}{dZ} = \frac{1}{v_{x-iy}} \simeq \frac{1}{V}. \quad (2.18)$$

En d'autres termes, comme prévu, le profil de vitesse devient uniforme à travers le jet en aval de l'orifice, ce qui implique que $\psi_1 = bV$. Il découle, à partir de l'équation 2.17, que le rapport de contraction d'un jet de liquide bidimensionnel émergent d'un orifice dans une paroi plane prend la valeur

$$\frac{b}{d} = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0,61. \quad (2.19)$$

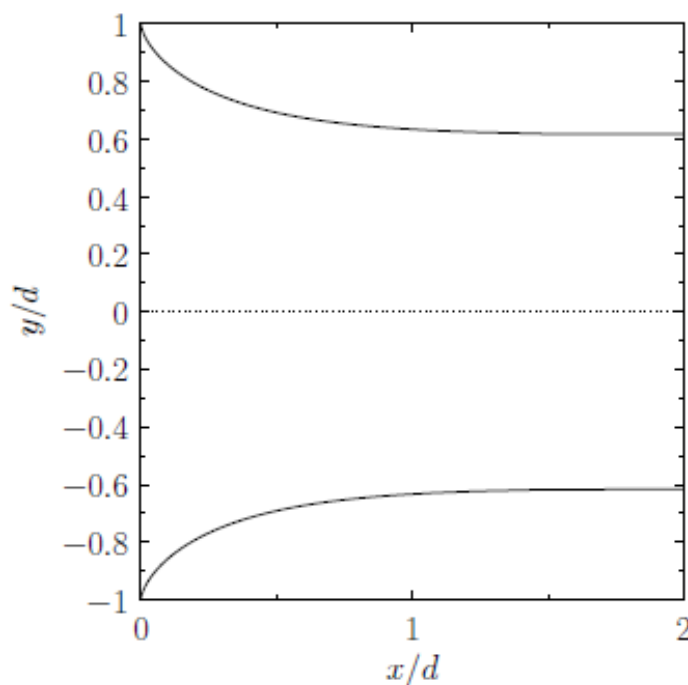


Figure 2.10: Forme de la surface libre de l'écoulement

Chapitre 3

Traitement numérique du problème

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique du problème considéré, en tenant compte des forces de la tension de surface et la gravité g sont nulle. En reformulé Le problème à l'aide de mappages conformes et le problème résolu par une méthode intégrale aux limites. pour présentés les profils de surface gratuits.

3.2 Formulation du problème

Nous nous intéressons à des écoulements potentiels irrotationnels. De l'équation de continuité $\nabla \cdot U = 0$, on tire que quel que soit l'écoulement d'un fluide incompressible, il existe toujours une fonction dite fonction de courant qui vérifie:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.1)$$

avec $U = (u, v)$ dans un repère cartésien $x - y$. Si de plus l'écoulement est irrotationnel, alors sa vorticité est nulle: $\nabla \times U = 0$ et donc il existe une fonction dite potentiel de vitesse telle que: $U = -\nabla \phi$. Nous nous plaçons aussi en régime permanent de telle sorte que le théorème de Bernoulli soit vérifié le long des lignes de courant $\psi = cte$. On a négligé en première approximation l'effet du champ de pesanteur.

On peut définir un potentiel complexe: $\omega = \phi + i\psi$. La dérivée de ce potentiel par rapport à $z = x + iy$ fournit la vitesse complexe:

$$\frac{d\omega}{dz} = u - iv \quad (3.2)$$

Dans cette section on prend aussi comme exemple jet bidimensionnel de liquide sortant d'un orifice (l'exemple qui on traité dans le chapitre précédente) mais dans ce cas on prendre avec les condition suivant:

le fluide occupé le demi-plan supérieure $y > 0$, sur le plan $x = 0$ y un trous dans la mur dans l'intervale $y \in [0, d]$, et l'épaisseur dans ce cas l'on prend b , et après la normalisation de problème donc l'écoulement net dans le jet est ψ_1 , on a $\psi = -1$ sur la rationalisation ABC , a l'infin dans le demi-plan supérieure l'organisation est donne par [figure3.1]. Ici, les effets de la gravité et la tension de surface sera négligée ($T = 0, g = 0$).

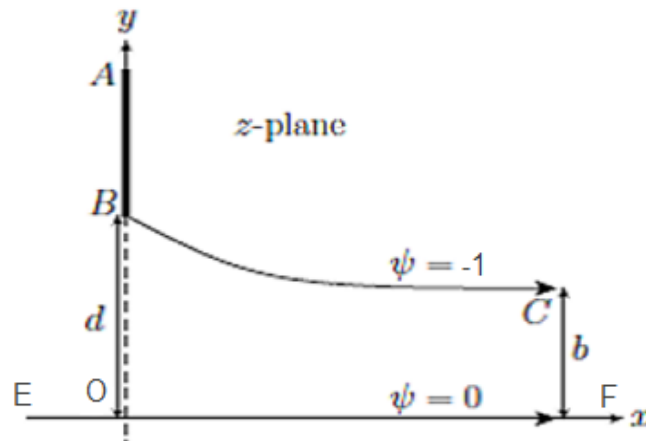


Figure 3.1: problème sur le plan Z

3.3 Solution Numérique

3.3.1 Première étape

Dans cette étape on utilise quelques transformations pour une simplification significative dans la formulation du problème est obtenue en utilisant φ et ψ comme variables indépendantes. Ce choix a été utilisé par Helmholtz et Kirchhoff pour enquêter sur les flux de surface libre. On transforme le plan Z [figure3.1] à le demi-plan supérieure [figure3.2], et qui représente les points dans [tableau3.1].

les point	plan Z	plan F
A	$x = 0, y = \infty$	$\phi = -\infty, \psi = -1$
B	$x = 0, y = d$	$\phi = 0, \psi = -1$
C	$x = \infty, y = b$	$\phi = +\infty, \psi = -1$
E	$x = -\infty, y = 0$	$\phi = -\infty, \psi = 0$
O	$x = 0, y = 0$	$\phi = 0, \psi = 0$
F	$x = \infty, y = 0$	$\phi = +\infty, \psi = 0$

Tableau 3.1 : Représentation des points du plan Z sur le plan F

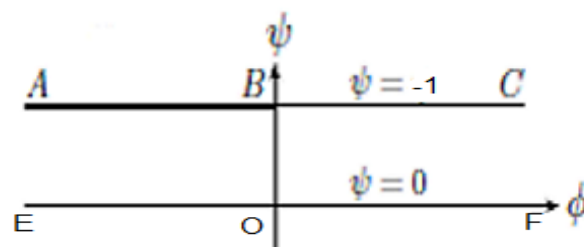


Figure 3.2: problème sur le plan F

L'objectif est de dériver une relation intégrale qui ne comporte que des inconnues qui se trouvent sur la surface libre. Cela ne peut pas être fait dans le plan Z , car des inconnues qui se situent sur les limites solides seraient incluses. Cependant, cela peut se faire en utilisant le cartographie conforme

$$\lambda = \alpha + i\beta = e^{\pi F} = e^{\pi(\phi+i\psi)} = e^{\pi\phi}(\cos(\pi\psi) + i \sin(\pi\psi)) \quad (3.3)$$

Cela donne la nouvelle tableau

les point	plan F	plan λ
A	$\phi = -\infty, \psi = -1$	$\alpha = 0, \beta = 0$
B	$\phi = 0, \psi = -1$	$\alpha = 1, \beta = 0$
C	$\phi = +\infty, \psi = -1$	$\alpha = \infty, \beta = 0$
E	$\phi = -\infty, \psi = 0$	$\alpha = 0, \beta = 0$
O	$\phi = 0, \psi = 0$	$\alpha = -1, \beta = 0$
F	$\phi = +\infty, \psi = 0$	$\alpha = +\infty, \beta = 0$

tableau 3.2 : Représentation des points du plan F sur le plan λ

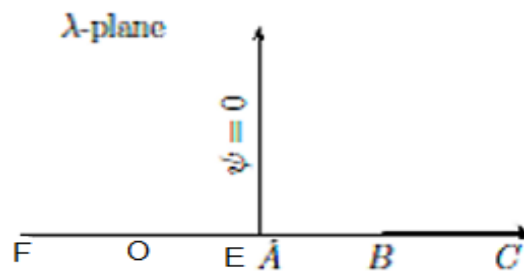


Figure 3.3: problème sur le plan λ

les équations doivent être reformulées pour le plan λ avec la géométrie du système intégré. on introduit une nouvelle fonction analytique, connue sous le nom de hodographe logarithmique, définie comme

$$w = u - iv = e^{\tau - i\theta} \quad (3.4)$$

La fonction $\tau - i\theta$ présente des propriétés intéressantes. Tout d'abord, la quantité $\tau = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2)$ est constante le long des rails simples. Deuxièmement, θ peut être interprété comme l'angle entre la vitesse du vecteur et l'horizontale.

En remplaçant en équation de Bernoulli, donne la forme finale de qui est nécessaire pour le calcul numérique. C'est

$$\frac{1}{2}e^{2\tau} = B \quad \text{on } BC \quad (3.5)$$

les valeurs limites sont :

$$\theta = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \text{inconnu} & \text{si } 1 < \alpha < +\infty \\ 0 & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

3.3.2 la deuxième étape

Nous résolvons le problème par une méthode d'équation intégrale aux limites. L'idée de base est de reformuler le problème en tant que système d'équations integro-différentielles qui ne comporte que des inconnues à la limite du domaine d'écoulement. Ce système est alors discrétisé et les équations algébriques résultantes sont résolues par itération (habituellement l'itération de Newton). L'avantage évident est que les points de maillage sont seulement nécessaires sur la frontière plutôt que sur l'ensemble du domaine d'écoulement. Un moyen pratique de dériver le système d'équations integro-différentielles pour les flux bidimensionnels consiste à utiliser la formule d'équation intégrale de Cauchy.

Tout d'abord, un contour intégral de la forme

$$\oint_{\gamma} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\lambda - \alpha_0} d\lambda, \quad (3.7)$$

où α_0 est un point d'image d'un point sur la surface libre, i.e $\alpha_0 \in BC$. Le chemin γ consiste en un grand arc de demi-cercle de rayon R , centré à l'origine, et l'axe réel avec une indentation circulaire du rayon r sur le point α_0 et une indentation circulaire du point α_B (Voir la figure(3.4)).

Par conséquent, en divisant le contour en ses composants, 3.7 devient

$$\oint_{\gamma} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\lambda - \alpha_0} d\lambda = \int_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\lambda - \alpha_0} d\lambda + \int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\lambda - \alpha_0} d\lambda + \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.8)$$

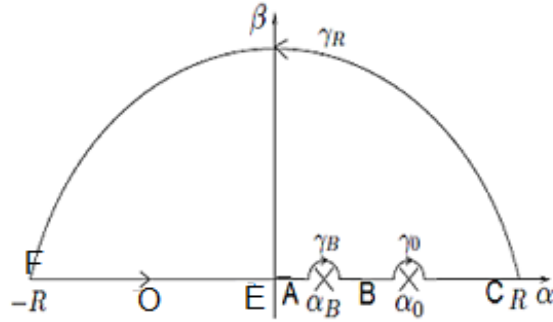


Figure 3.4: Le complexe λ - plan montrant le contour utilisé dans la dérivation de (3.16).

Par conséquent, Cauchy implique que l'intégrale de contour sur le côté gauche de 3.8 est égale à zéro, puisqu'elle ne renferme pas une singularité. Cela signifie que 3.8 devient

$$\int_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\lambda - \alpha_0} d\lambda + \int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\lambda - \alpha_0} d\lambda + \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = 0 \quad (3.9)$$

En regardant les intégrales dans 3.9 séparément, en commençant par l'intégrale impliquant 0, alors 3.9 peut être simplifié plus loin.

Laisser $\lambda = \alpha_0 + re^{i\zeta}$, so $d\lambda = ire^{i\zeta}d\zeta$, puis

$$\int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\lambda - \alpha_0} d\lambda = \int_{\pi}^0 \frac{\tau(\alpha_0 + r \cos \zeta, r \sin \zeta) - i\theta(\alpha_0 + r \cos \zeta, r \sin \zeta)}{re^{i\zeta}} ire^{i\zeta} d\zeta \quad (3.10)$$

La liberté de laisser $r \rightarrow 0$ implique que 3.10 devient

$$i(\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0)) \int_{\pi}^0 d\zeta = \pi i(\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0)) \quad (3.11)$$

En remplaçant ce résultat en 3.9,

$$\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\lambda - \alpha_0} d\lambda + \frac{1}{\pi i} \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.12)$$

La limite de 3.12, telle que $R \rightarrow \infty$ est prise. La deuxième intégrale sur le côté droit De 3.7 devient

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.13)$$

Les intégrales sur les côtés droits 3.12 et 3.13 sont les valeurs principales de Cauchy.

Comme $R \rightarrow \infty$, $|\beta| \rightarrow \infty$, à partir de 3.3, on peut voir que $\phi \rightarrow -\infty$. En tant que $\phi \rightarrow -\infty$, le flux devient un flux uniforme horizontal, avec une vitesse non dimensionnée à 1, c'est-à-dire $u - iv \rightarrow 1$. à partir de 3.4, cela implique que $\tau - i\theta \rightarrow 0$. Par conséquent, la limite de la première intéale sur le côté droit de 3.12, comme $R \rightarrow \infty$ est

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\lambda - \alpha_0} d\lambda = 0. \quad (3.14)$$

Maintenant 3.12 a été réduit à

$$\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.15)$$

En prenant la partie réelle de 3.15, la relation intégrale entre τ et θ , Sur la surface libre, est obtenu

$$\tau(\alpha_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.16)$$

où $\theta(\alpha) = \theta(\alpha, 0)$ et $\tau(\alpha) = \tau(\alpha, 0)$

l'intégrale est séparée en quatre parties pour donner

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_0^1 \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_1^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \right) \quad (3.17)$$

En appliquant 3.3, L'intégrale simplifie

$$\begin{aligned} \tau(\alpha_0) &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 \frac{-\frac{\pi}{2}}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_1^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{-\infty}^0 \frac{0}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \\ &= -\frac{1}{2} [\ln(\alpha - \alpha_0)]_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \\ &= -\frac{1}{2} [\ln(1 - \alpha_0) - \ln(-\alpha_0)] + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha. \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - \alpha_0}{-\alpha_0}\right) + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Cette équation tient le long de la surface libre et donc en utilisant 3.3, avec $\psi = 0$ donne

$$\alpha = e^{\pi\phi}. \quad (3.19)$$

En remplaçant 3.19 en 3.18

$$\tau'(\phi_0) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - e^{\pi\phi_0}}{-e^{\pi\phi_0}}\right) + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\theta'(\phi) e^{\pi\phi}}{e^{\pi\phi} - e^{\pi\phi_0}} d\phi, \quad (3.20)$$

où $\tau'(\phi_0) = \tau(e^{\pi\phi_0})$ et $\theta'(\phi_0) = \theta(e^{\pi\phi_0})$, Il convient de noter à ce stade, une raison de choisir 3.3 que la carte conforme est que l'intégrand dans 3.18 tend à zéro rapidement en tant que $\phi \rightarrow \infty$. 3.5 est maintenant réécrit en termes de τ' , comme

$$\frac{1}{2} e^{2\tau'} = B. \quad (3.21)$$

En remplaçant 3.20 en 3.21, définissez un équation non linéaire integro différentielle pour la fonction inconnue θ' .

L'expression 3.20 est utilisée pour calculer τ Le long de la surface libre. Il est nécessaire d'avoir des points ϕ_0 , le long de la surface libre à laquelle τ Les valeurs peuvent être évaluées. Ceci se fait en créant une maille également espacée, dans la fonction potentielle, sur la région qui se rapporte à la surface libre, c'est-à-dire $0 \leq \phi < \infty$. Laisser

$$\phi_I = (I - 1)\Delta \quad I = 1, \dots, N. \quad (3.22)$$

Où $\Delta > 0$, est l'incrément uniforme ϕ Entre points de maille consécutifs. Si ce sont les points utilisés dans le calcul τ , Alors un problème se pose avec la partie intégrante

$$\int_1^\infty \frac{\theta'(\phi)e^{\pi\phi}}{e^{\pi\phi} - e^{\pi\phi_0}} d\phi, \quad (3.23)$$

une sommation sur ϕ_I telle que ϕ_0 est le point médian d'un sous-intervalle, Comme suit

$$\phi_I^m = \frac{\phi_{I+1} + \phi_I}{2} \quad I = 1, \dots, N - 1. \quad (3.24)$$

3.20 est réécrit comme

$$\tau_I^m = \tau'(\phi_I^m) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - e^{\pi\phi_I^m}}{-e^{\pi\phi_I^m}}\right) + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\theta'(\phi)e^{\pi\phi}}{e^{\pi\phi} - e^{\pi\phi_I^m}} d\phi. \quad (3.25)$$

Ensuite, l'utilisation de la règle trapézoïdale donne

$$\tau_I^m = \tau'(\phi_I^m) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - e^{\pi\phi_I^m}}{-e^{\pi\phi_I^m}}\right) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\theta_j(\phi)e^{\pi\phi} \Delta w_j}{e^{\pi\phi} - e^{\pi\phi_I^m}} d\phi \quad I = 1, \dots, N - 1. \quad (3.26)$$

Où w_j est la fonction de pondération telle que

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & : j = 1, N \\ 1 & : \text{ailleurs} \end{cases}$$

et $\theta_j = \theta'(\phi_j)$, En remplaçant 3.26 en 3.21, pour tous les points intermédiaires, donne un système d'équations algébriques non linéaires pour des $(N - 1)$ inconnues. Ce système est résolu par la méthode de Newton.

Conclusion

Dans ce travail on a étudié un problème d'écoulement potentiel, bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux de type jet. Le traitement analytique de ce problème dans le cas où les effets de gravité et de la tension de surface sont négligés en utilisant la transformation conforme d'hodographe dû à Kirchhoff (1869) et la transformation Schwarz-Christoffel pour trouver la forme de surface libre. On a donné une formulation mathématique de ce problème, on a aussi donné une étude numérique par la méthode Integro-différentiel basé sur le théorème de Cauchy pour traiter approximativement ce problème.

Bibliographie

- [1] **Ben Hamoduda Raidh**, Notions de Mécanique des fluides, cours et exercices corrigés. Centre de Publication Universitaire, Tunis 2008.
- [2] **Christophe Ancey**, Mécanique des fluides, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne Ecublens, 26 juin 2010.
- [3] **Damou Merzak**. MSC.PHD. Mécanique des fluides, réimpression 1996.
- [4] **Jean-Marc Vanden-Broeck**, Gravity-Capillary Free-Surface Flows. University Press, New York, 2010.
- [5] **Kherfi salima**, Problème des écoulements au-dessus des obstacles avec l'effet de gravité, mémoire master de université de ouargla (2015).
- [6] **Laiadi abdelkader**, effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles , mémoire magistère de université de ouargla (2012).
- [7] **Murray R**, Theory and Problems of Complex Variables, Siegel Copyright OMcGraw-Hill Inc, New York, 1973.
- [8] **Patrick Huerre**, Mécanique des fluides Cours Département de Mécanique, FRANCE, 1998 .
- [9] **Rimi Khazzani**, Résolution analytique du problème d'écoulement sans l'effet de gravité, mémoire master de université de ouargla (2016).
- [10] **Richard Fitzpatrick**, <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336L/Fluidhtml/node89.html>, 9 mai 2017.

- [11] **Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia**, Mécanique des fluides, Dunod, Paris, 2011.

- [12] **Scott Tooley**, The Effects Of Surface Tension On Free Surface Flows Intersecting Rigid Walls, these PHD, University of East Anglia, July 2002.