

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed Boudiaf De M'sil
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et appliquées

Par

Loukriz Soumaya

Sujet

Approximation d'un problème d'écoulement
par la méthode intégral-différentielle

Date de soutenance : 29/05/2017

Devant le jury :

Mr. Mostepha NADIR

Prof. Univ de M'sila Président

Mr. Abdelkader GASMI

Prof. Univ de M'sila Rapporteur

Mr. Bachir GAGUI

Prof. Univ de M'sila Examineur

Promotion : 2016 / 2017

Remerciements

Le remerciement infini avant tous est à Dieu le plus puissant qui m'a comblé des bienfaits de l'Islam et de la Science.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **Gasmi Abdelkader**, encadreur de ce mémoire, pour son aide précieuse sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **Mostepha Nadir** d'avoir accepté la présidence du jury de cette mémoire, sa présence m'honore grandement. Je le pris d'accepter mes remerciements.

Mes remerciement vont aussi à Messieur **Gagui Bachir** pour avoir accepté d'examiner mon travail, qu'il trouve ici mes profond respect.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribue de près ou de loin à la réalisation de ce travail

Dédicace

Je tiens à dédier ce modeste travail à :

ma chère mère **Rahmouni Meriem.**

et mon cher père **Lakhdar.**

A mes frères : **Talha, Djaber.**

et mes sœurs : **Halima, Naciba.**

A mes oncles : **Salim, Mohamed, Djamel, Mourad, Lakhdar.**

et mes tantes : **Masouda, Zahra, Sarah.**

Tous mes amis en particulier : **Hadjer, kheira, Ladmia, khadidja,**

Ahlame, meriem, khadidja, maroua, khadidja.

A tous mes amis de la promotion,

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou loin pour réaliser ce modeste travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides	3
1.1 Introduction	3
1.2 Rappels et définitions	3
1.2.1 Les fluides	3
1.2.2 Propriétés physique des fluides	4
1.2.3 Forces subies par un fluide	5
1.2.4 Débit	5
1.3 Quelques types des écoulements	6
1.3.1 Écoulements incompressibles	6
1.3.2 Écoulements irrotationnels	7
1.3.3 Écoulements permanents	7
1.3.4 Écoulements potentiel	7
1.4 Descriptions du mouvement	7
1.4.1 Description de Lagrange	7
1.4.2 Description d'Euler	8
1.5 Fonction de courant dans le cas d'un écoulement plan	9
1.6 Fonction potentielle complexe	10
1.7 Équation de la mécanique des fluides	10
1.7.1 Équation fondamentale de la statique des fluides	10
1.7.2 Équation de continuité	12

1.7.3	Équation d'Euler	13
1.7.4	Équation de Bernoulli	13
1.8	Fonction analytique	14
1.8.1	Formule intégrale de Cauchy	14
1.8.2	Dérivabilité n-ième des fonctions analytiques	14
1.9	Tranformations conformes	14
2	Solution analytique du problème bidimensinnel d'un cavité	16
2.1	Introduction	16
2.2	Transformation de Schwarz-Christoffel	16
2.3	Méthode des lignes de courant libres	18
2.4	Position du problème	19
2.5	Solution exacte	21
2.5.1	Première étape	21
2.5.2	Deuxième étape	23
3	Solution numérique d'un problème de cavité par la méthode intégro-différentielle	29
3.1	Introduction	29
3.2	Formulation du problème	29
3.2.1	Première étape	29
3.2.2	Deuxième étape	35
3.3	Procédure numérique	36
3.4	Conclusion	38
	Conclusion	38
	Bibliographie	40

Introduction

Les problèmes d'écoulements à surfaces libres se trouvent dans beaucoup d'applications scientifique. Ils peuvent être définies comme des problèmes dont les formulations mathématiques comportant des surfaces (surfaces libres), qui doivent être trouvées comme faisant partie de la solution. Citons comme exemples de problèmes à surfaces libres : problèmes qui traitent les vagues de la mer, les bulles montantes dans un liquide, les écoulements au dessus des obstacles. Dans ces exemples la surface libre est la surface de la mer, l'interface entre gaz et liquide respectivement. Dans notre mémoire, nous restreindrons aux problèmes de la mécanique des fluides. De nombreux résultats on été obtenus pour le cas des écoulements à surfaces libres, bidimensionnels et stationnaires.

Dans le présent travail, on propose d'étudier un écoulement à surface libre au dessus d'un obstacle. L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables $(x; y)$ de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$. En négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme du *Kirchhoff* (1869) ou la transformation *Schwarz – Christoffel*. Si les tensions de surface sont pris en considération, le problème ne peut être résolu exactement. Pour résoudre le problème, On cherche une solution analytique en considérant les paramètres du problème si les tensions de surface est non nulles on résoud le problème numériquement.

Notre travail est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on présente les notions fondamentale de la mécanique des fluides , quelque définitions des types des écoulements, la fonction de courant et les équations de la mécanique des fluides (continuité, bernoulli, ... ect) et on difénie la transformation comforme.

Dans le second chapitre, on traite le problème dans le cas où la tension de surface et les forces de gravité sont négligable. Dans ce cas, le problème admet une solution exacte. on utilise la méthode des transformation conforme qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre, on utilise tout d'abord la technique de transformation Schwarz-Christoffel pour obtenir la solution exacte.

Dans le dernier chapitre, on étudie le même problème posé dans le deuxième chapitre, en tenant compte de l'effet de la tension de surface, la solution exacte du problème ne peut être calculée explicitement à cause du terme non linéaire figurant dans la condition au bord (équation de Bernoulli). Alors on adopte une méthode numérique basée sur une formulation d'équation integro-différentielle.

Enfin on termine ce travail par une conclusion.

Chapitre 1

Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente les concepts de base de la mécanique des fluides : quelques définitions et propriétés des fluides, notions préliminaires concernant les écoulements potentiels, bidimensionnels et irrotationnel d'un fluide incompressible et les équations générales du mouvement des fluides.

1.2 Rappels et définitions

1.2.1 Les fluides

Définition 1.2.1 (*milieu continu*)

On dit qu'un fluide est un milieu continu s'il est considéré comme un ensemble d'un grand nombre de particules matérielles

- très petite
- libres de se déplacer les une par rapport aux autres
- les forces qui lient les particules est faible
- prennent la forme de la corps dans lesquels ils sont situés

- déformée facilement.

Définition 1.2.2 (*Fluide parfait*)

Un fluide est dit parfait s'il est les effets de frottement est négligable. C-à-d quand la composante F_T est nulle.

Définition 1.2.3 (*Fluide incompressible*)

Un fluide est dit incompressible si le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.).

1.2.2 Propriétés physique des fluides**Définition 1.2.4 (*masse volumique*)**

La masse volumique peut être déterminée en calculant son rapport masse sur volume.

$$\rho = m/v,$$

Où

ρ : Masse volumique en (kg/ m³),

m : masse en (kg),

v : volume en (m³).

Définition 1.2.5 (*Densité*)

La densité d'un corps est le rapport entre la masse volumique de ce corps et la masse volumique d'un corps de référence.

$$d = \rho_{fluide} / \rho_{fluide\ référence}.$$

Définition 1.2.6 (*La viscosité*)

La viscosité d'un fluide constitue une résistance à la déformation ou bien au glissement relatif de ces couches.

1.2.3 Forces subies par un fluide

Définition 1.2.7 (Force de volume)

la force de volume proportionnelles avec l'élément de volume qui exerce sur lui

$$d\vec{F} = \vec{f}_v dv.$$

on introduisons une représentation massique de ces forces sous la forme :

$$d\vec{F} = \vec{f}_m dm = \rho \vec{f}_m dv.$$

d'où l'équivalence :

$$\vec{f}_v = \rho \vec{f}_m.$$

Définition 1.2.8 (Forces de surface)

c'est la force perpendiculaire qui appliquée par les particules de fluide sur l'unité de surface.

$$d\vec{F} = -p \vec{n} dS.$$

Où :

dF : est la force exercée sur l'élément de surface dS ,

p : est la pression régnant au point M ,

\vec{n} : vecteur unité perpendiculaire à la surface S pointant vers l'exterieur.

1.2.4 Débit

Définition 1.2.9 (Débit massique)

c'est la contité de fluide qui traverse la section S par unité de temps. donnée par

$$\dot{m} = \int \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS.$$

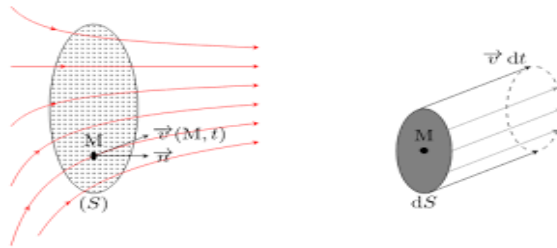


Figure 1.1: La quantité de fluide qui traverse la section S

Définition 1.2.10 (Débit volumique)

débit volumique à travers la section S par unité de temps. donnée par

$$\dot{V} = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

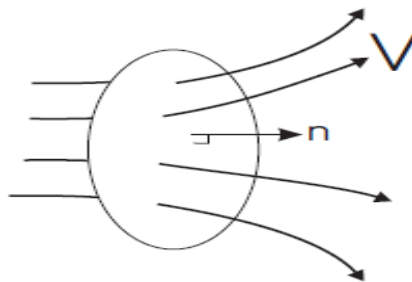


Figure 1.2: Débit d'un champ de vitesse à travers une surface S

1.3 Quelques types des écoulements

1.3.1 Écoulements incompressibles

On dit qu'un écoulement incompressible si la masse volumique de fluide est constante et ne dépend pas de la pression

1.3.2 Ecoulements irrotationnels

On dit qu'un écoulement irrotationnel si le champs des vitesses du fluide est nul

$$\overrightarrow{rot} \vec{v} = 0$$

1.3.3 Ecoulements permanents

On dit qu'un écoulement d'un fluide est permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est constant dans le temps .

1.3.4 Ecoulements potentiel

On dit qu'un écoulement est potentiel si sa vecteur vitesse est d'un potentiel c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \exists \phi / \overrightarrow{\text{grad}} \phi &= \vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} \\ u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} , v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}$$

1.4 Descriptions du mouvement

1.4.1 Description de Lagrange

La discription la grangienne consiste à suivre le mouvement d'un particule de fluide le long de sa trajectoire à chaque moment .

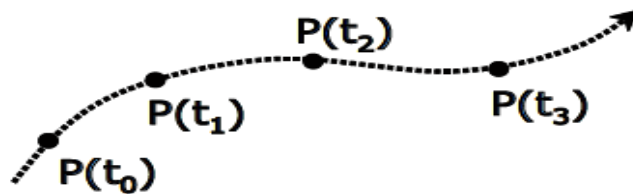


Figure 1.3:trajectoire de la particule P

trajectoire

On définit la trajectoire comme le chemin suivie par un particule de fluide pendant sa mouvement.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

1.4.2 Description d'Euler

La description d'Euler consiste à établir à un instant donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point du fluide

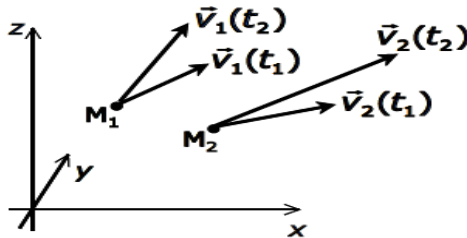


Figure 1.4: La vitesse, mesurée aux points M_1 ou M_2 évolue au cours du temps

Ligne de courant

La ligne de courant est tangente au chaque vecteur vitesse dans un temps fixé. Son équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dx}{u(x, y, t)} = \frac{dy}{v(x, y, t)}$$

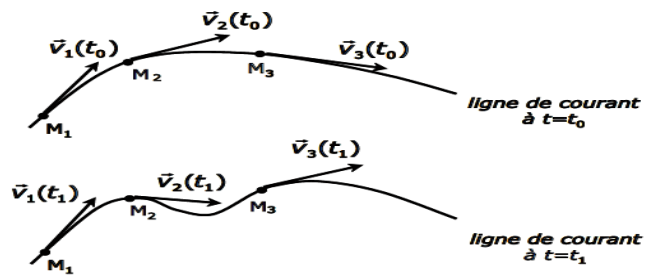


Figure 1.5: Lignes de courant à différents dans le temps

Tube de courant

On appelle tube de courant l'ensemble des ligne de courant qui entouré à trajet d'écoulement

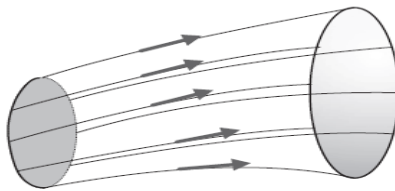


Figure 1.6: Tube de courant

1.5 Fonction de courant dans le cas d'un écoulement plan

Dans un domaine D , on appelle écoulement plan (ou bidimensionnel) si en tout point de ce domaine, à l'instant t , le vecteur vitesse \vec{V} est parallèle à un plan donné (p).

Ecrivons $\text{div}(\vec{v}) = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Cela implique que la forme différentielle $u dx - v dy$ est, à fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction ψ

$$\exists \psi(x, y, t) \quad , d\psi = u dx - v dy$$

On a donc immédiatement :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

ψ s'appelle la fonction de courant, car elle permet un calcul simple des lignes de courant.

les lignes $\psi(x, y, t) = C(t)$ sont les lignes decourant

1.6 Fonction potentielle complexe

Soit un écoulement plan incompressible, irrotationnel d'un fluide parfait. Les fonctions ϕ et ψ sont reliées dans le domaine de l'écoulement par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Si, en plus, ces deux quantités sont continues, ces relations sont dites de *Cauchy – Riemann*.

Si les dérivées deuxième des fonctions ϕ et ψ existent et continues, on a :

$$\Delta \phi = \Delta \psi = 0$$

Les lignes $\phi = cst$ et $\psi = cst$ constituent des familles orthogonales.

La vitesse complexe est donnée par :

$$w(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - iv$$

1.7 Équation de la mécanique des fluides

1.7.1 Équation fondamentale de la statique des fluides

On considère un volume élémentaire de la forme suivante

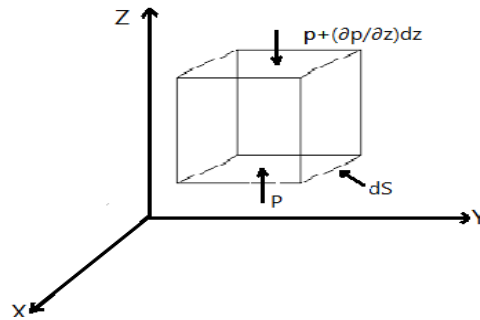


Figure 1.7:Équilibre des forces sur un élément de fluide au repos

Dans le cas l'équilibre des forces :

$$\sum \vec{F} = 0$$

On a suivant l'axe (OZ):

$$p dS - (p + \frac{\partial p}{\partial z})dS + \rho f_z dS dz = 0$$

Après simplifications, on a

$$\rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

En générale, les forces de volume dérivent d'un potentiel :

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

De la même façon sur l'axe (OX) et (OY) trouvons :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \rho \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Donc l'équation fondamentale de la statique est :

$$\rho \overrightarrow{\text{grad}} U + \overrightarrow{\text{grad}} p = 0$$

1.7.2 Équation de continuité

L'équation de continuité exprime la conservation de la masse : la variation de masse pendant un temps du fluide contenu dans ce volume doit être égale à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle du fluide sortant.

On considère un élément de volume fixe de fluide : $dV = dxdydz$.

Sa masse peut s'exprimer comme : $dm = \rho dV$

La variation de cette masse pendant dt s'écrit : $dm = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt$.

Cette variation doit alors être égale à la somme des masses de fluide qui entrent et sortent par les six faces de l'élément de volume dV .

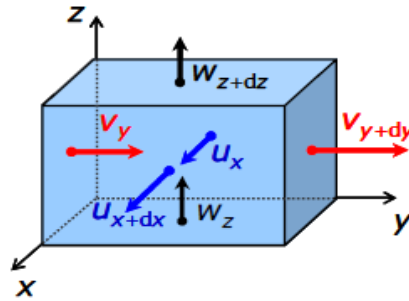


Figure 1.8: Volume elementaire
 $dx.dy.dz$

Suivant l'axe y , le fluide entre avec la vitesse v_y et sort avec la vitesse v_{y+dy} . Par conséquent, la masse entrant pendant le temps dt s'exprime par $(\rho v dx dz dt)_y$ et la masse sortant par $(\rho v dx dz dt)_{y+dy}$.

Le bilan sur l'axe y donne : $[(\rho v)_y - (\rho v)_{y+dy}] dx dz dt$. Un développement au premier ordre permet d'écrire :

$$(\rho v)_{y+dy} = (\rho v)_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy$$

On a alors : $-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dx dz dt$ suivant l'axe y .

de la même manière sur les deux autres axes, on trouve :

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt \text{ suivant l'axe } x$$

$$-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz dx dy dt \text{ suivant l'axe } z$$

Au total, à travers les six faces on a, puisque $dxdydz = dV$:

$$- \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dV dt$$

La conservation de la masse du volume dV s'écrit donc :

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt = - \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dV dt$$

Soit l'équation de continuité qui traduit le principe de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

1.7.3 Équation d'Euler

Soit \vec{f}_v la densité volumique de forces extérieures exercées sur un fluide parfait, incompressible

. L'équation du mouvement d'une particule fluide est :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} p$$

On a :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}(v^2/2) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$$

Nous obtenons alors les deux l'équation d'Euler :

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} p \\ \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}(v^2/2) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} \right] = \vec{f}_m - \overrightarrow{\text{grad}} p \end{cases}$$

1.7.4 Équation de Bernoulli

Dans ce cas, les forces volumiques extérieures se réduisent à

$$\vec{f}_v = \rho g$$

on considère l'écoulement irrotationnel

$$\rho v^2/2 + \rho e_{p_m} + p = cte$$

1.8 Fonction analytique

. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique dans Ω si, pour tout point $a \in \Omega$ il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que :

– Le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est strictement positif ; on notera $S(z)$ sa somme définie dans $B(0, R_a)$.

– Il existe un réel $r \in]0, R_a[$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ est contenue dans Ω et

$$\forall z \in B(a, r), \quad f(z) = S(z - a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

1.8.1 Formule intégrale de Cauchy

Proposition 1.8.1 *Soit f analytique sur un domaine Ω simplement connexe, et $z \in \Omega$.*

Alors on a, pour tout contour γ de Ω orienté positivement et entourant z :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z_0 - z} dz_0$$

1.8.2 Dérivabilité n-ième des fonctions analytiques

Proposition 1.8.2 *Soit f analytique sur un domaine Ω , alors f est de classe C^{∞} sur Ω .*

Si de plus Ω est simplement connexe, pour tout contour γ entourant z on a :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{(z_0 - z)^{n+1}} dz_0$$

1.9 Transformations conformes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable au sens des fonctions de deux variables réelles, et non constantes au voisinage d'un point (x_0, y_0) . On dit que f préserve les angles au point (x_0, y_0) si quels que soient les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 passant par (x_0, y_0) , les vecteurs tangents à ces courbes au point (x_0, y_0) font le même angle orienté que les vecteurs tangents aux courbes $f(\Gamma_1)$ et $f(\Gamma_2)$ au point $f(x_0, y_0)$.

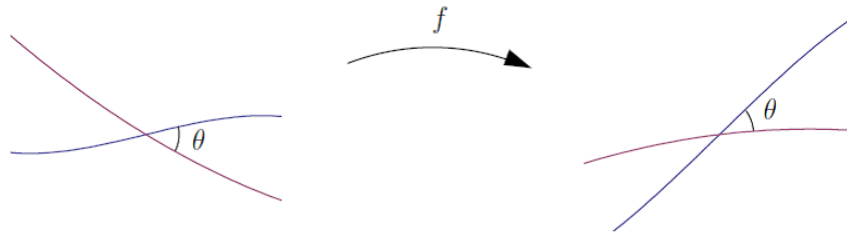


Figure 1.9: Transformations conformes

Proposition 1.9.1 *soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ et telle que $f'(z_0) \neq 0$. Alors f préserve les angles au point z_0 .*

On dit que f définie sur un ouvert Ω de \mathbb{C} est une transformation conforme si

- f est analytique dans Ω
- f est une bijection de $\Omega \rightarrow f(\Omega)$

Chapitre 2

Solution analytique du problème bidimensionnel d'une cavité

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un problème d'écoulement potentiel, bidimensionnel, d'un fluide incompressible et non visqueux, passant devant une plaque verticale, on étudie le problème au demi-plan supérieur, où les effets de la gravité et de la tension de surface sont négligeables. Nous utilisons la méthode des lignes de courant libres et la transformation de *Schwarz – Christoffel* pour obtenir la solution exacte.

2.2 Transformation de Schwarz-Christoffel

Considérons un polygone [*figure 2.1*] dans le plan des w , ayant pour sommets w_1, w_2, \dots, w_n et pour angles intérieurs respectivement a_1, a_2, \dots, a_n . Soit w_1, w_2, \dots, w_n les points correspondant respectivement à x_1, x_2, \dots, x_n de l'axe réel du plan des z [*figure 2.2*]

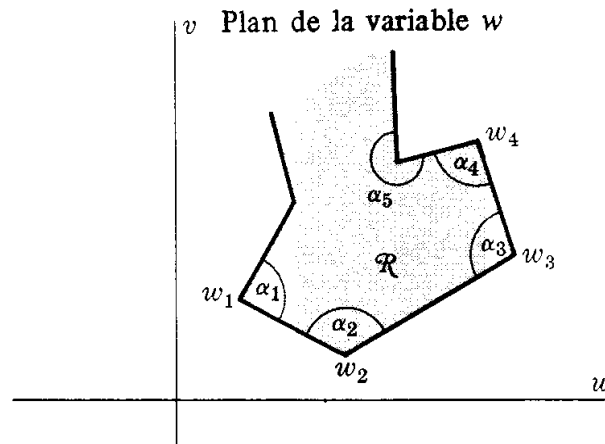


Figure 2.1: Plan de la variable w

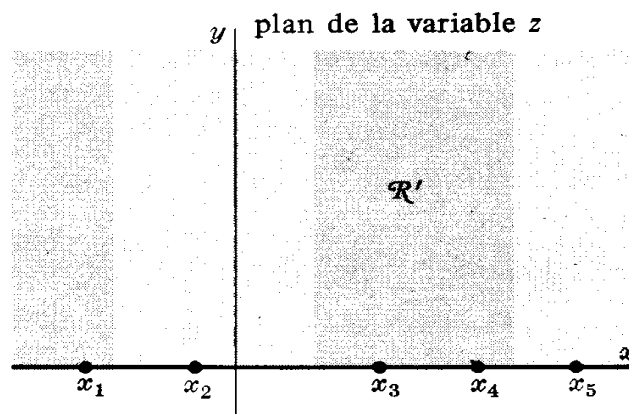


Figure 2.2: Plan de la variable z

Une transformation qui représente l'intérieur \Re du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des z , et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donnée par

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1}, \dots, (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1}, \quad (2.1)$$

où

$$w = \int A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1}, \dots, (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1} + B, \quad (2.2)$$

où A et B sont des constantes complexes.

On notera que

1. Parmi les points x_1, x_2, \dots, x_n on peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple x_n , à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de (2.1) et (2.2) n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones fermés.

2.3 Méthode des lignes de courant libres

La théorie des lignes de courant libres consiste à étudier les problèmes d'écoulements potentiels et bidimensionnels, partiellement bornée par les parois rigides et rectilignes et d'autres parties par lignes de courant libres, sur les quelles la pression est supposée constante. Si aucune surface libre n'est présente et l'effet de la gravité n'est pas considérée l'écoulement dans le plan physique est un polygone. Si les lignes de courant libres sont présentes et l'effet de la gravité et la tension de surface sont négligeables le domaine de l'écoulement dans le plan transformé par une transformation conforme appropriée est aussi un polygone, ce qui nous permet dans deux cas de trouver la solution exacte du problème. Une méthode de résolution a été introduite par *Kirchhoff* (1869) dont l'idée de base est l'introduction de la variable complexe Ω définie par :

$$\Omega = \log \left(\frac{dw}{dz} \right) = \log \left(\frac{1}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{1}{q} \right) - i\theta. \quad (2.3)$$

Où $z = x + iy$, $w = \phi + i\psi$, $\frac{dw}{dz} = u - iv$ et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$, avec (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse, θ est l'angle que forme le vecteur vitesse avec l'horizontale.

On remarque que La fonction Ω possède de simples propriétés suivantes :

- La partie réelle de Ω est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e., $\log\left(\frac{U}{q}\right) = cst.$
- La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e., $i\theta = cst.$

2.4 Position du problème

Considérons un écoulement bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux . Nous supposons que le fluide remplit tout l'espace au dessus du demi-plan supérieur et d'arrière l'obstacle qui forme une cavité limitée par une ligne de courant libre qui s'étend vers l'infini (*figure2.3*). On suppose l'écoulement est uniforme à l'infini de vitesse U et la pression est constante sur la ligne de courant libre. Nous choisissons comme repère de référence la ligne AB sur l'axe $x'ox$, la paroi rigide BC sur la droite d'équation $y = H$ et la surface libre sur la ligne de courant CD .

Le problème mathématique consiste à déterminer la fonction potentielle qui vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \text{dans le domaine d'écoulement} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 & \text{sur } AB \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 & \text{sur } BC \end{array} \right.$$

et la condition de Bernoulli sur la surface libre est donne par:

$$p + \frac{1}{2}\rho q^2 = cst \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \frac{p}{\rho} = cst \quad \text{sur } CD$$

Où p la pression du fluide , ρ la densité du fluide et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ le module de vecteur de vitesse.

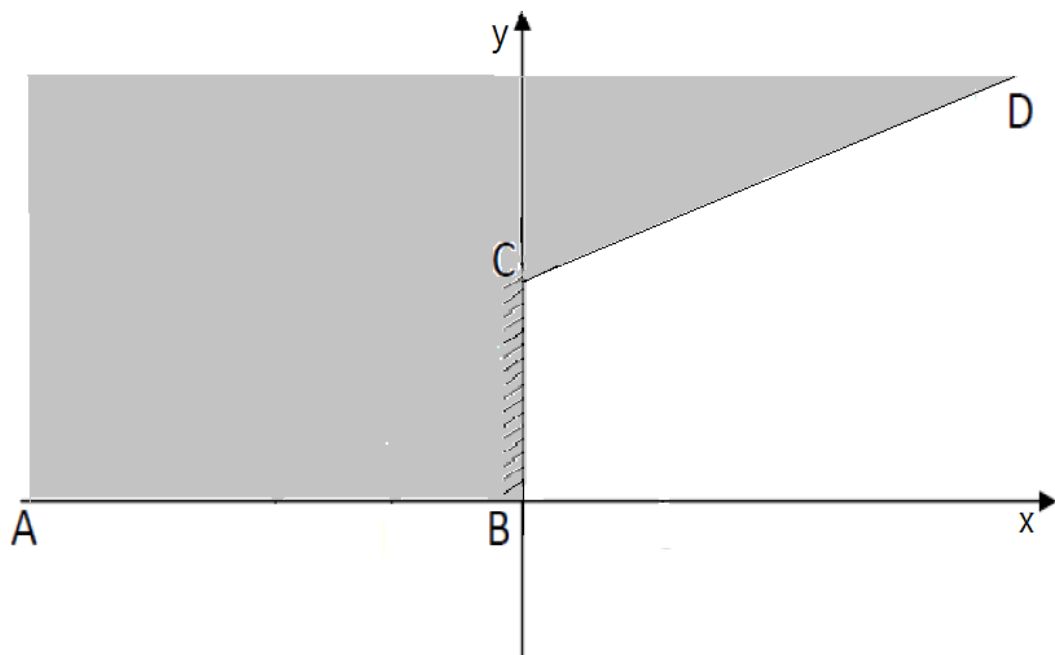


Figure 2.3: Schéma d'écoulement et des coordonnées

2.5 Solution exacte

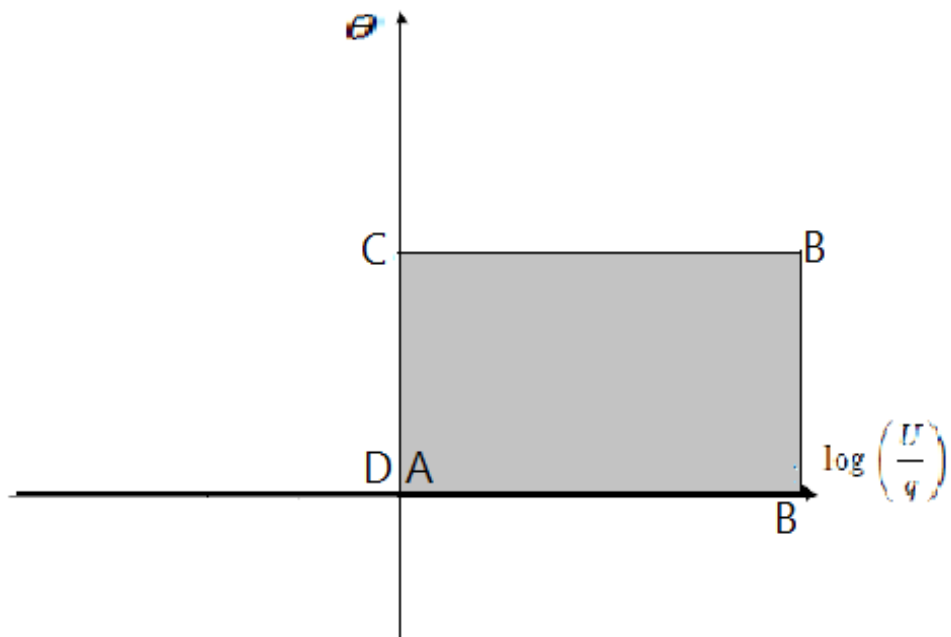
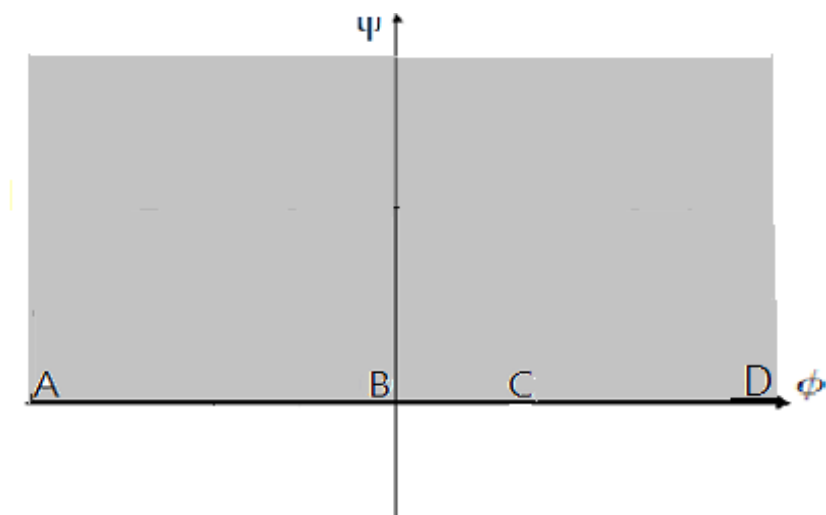
2.5.1 Première étape

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de *Schwarz – Christoffel* pour trouver la solution exacte du problème.

- On transforme le plan de l'écoulement réel dans le plan complexe z au plan de l'écoulement Ω . On utilise la définition de Ω donnée dans (2.3), nous obtenons

$$\Omega = \log \left(\frac{U}{dw/dz} \right) = \log \left(\frac{U}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{U}{q} \right) - i\theta \quad (2.5)$$

- On transforme le plan de l'écoulement réel dans le plan complexe z au plan de l'écoulement f où $f(z) = \phi(z) + i\psi(z)$. nous prendrons $\psi = 0$ sur la ligne centrale qui se divise au point de stagnation B (à laquelle $\phi = 0$) et plus tard devient la ligne libre.

Figure 2.4: plan de la variable Ω Figure 2.5: plan de la variable $f = \phi + i\psi$

2.5.2 Deuxième étape

D'après la méthode des lignes de courant libres l'écoulement est représentée dans le plan Ω par une figure rectiligne. Il est également que l'écoulement est représentée par une figure rectiligne dans le plan f , c'est-à-dire une ligne droite parallèle à l'axe réel correspondant aux deux courbes de délimitation. Maintenant, nous savons du théorème *Schwarz-Christoffel* qu'il est toujours possible de trouver une transformation conforme qui mappe l'intérieur ou l'extérieur d'un polygone dans un plan sur la moitié d'un autre plan. Ainsi, il est possible de trouver des relations conformes entre Ω et une nouvelle variable complexe λ , et entre f et λ , de sorte que la région d'écoulement soit mappée sur la moitié supérieure du plan λ dans les deux cas. De cette manière peut être obtenue une relation entre Ω et f , d'où une expression pour f en termes de z suit par intégration.

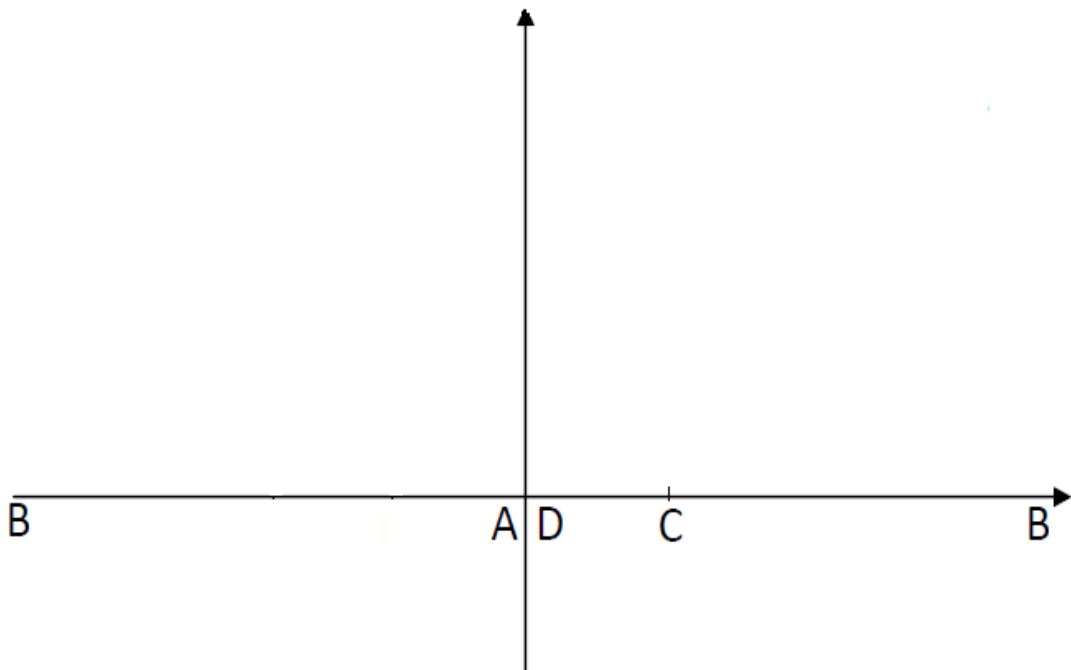


Figure 2.6: plan de la variable λ

- On va chercher une relation entre λ et Ω :

Nous utilisons la transformation de *Schwarz – Christoffel* pour transformer le plan de l'écoulement dans le plan Ω au plan de l'écoulement λ tels que les points A , B , C et D dans plan Ω se transforment aux points $A = 0$, $B = \infty$, $C = 1$ et $D = 0$ dans le plan λ (*figure 2.6*)

La transformation de *Schwarz – Christoffel* donne :

$$\begin{aligned}\Omega &= \alpha \int (\lambda - 0)^{\frac{\pi}{2\pi}-1} (\lambda - 1)^{\frac{\pi}{2\pi}-1} d\lambda + \beta \\ \Omega &= \alpha \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda} \sqrt{(\lambda - 1)}} + \beta \\ \Omega &= 2\alpha \ln(\sqrt{\lambda} + \sqrt{(\lambda - 1)}) + \beta\end{aligned}\tag{2.6}$$

Pour déterminer les constantes α et β on effectue :

On remplace le point C ($\lambda = 1, \Omega = \frac{\pi}{2}i$) et le point A ($\lambda = 0, \Omega = 0$) dans l'équation (2.6) trouve :

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}i = \alpha \ln(\sqrt{1} + \sqrt{(1 - 1)}) + \beta \\ 0 = \alpha \ln(\sqrt{0} + \sqrt{(0 - 1)}) + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{\pi}{2}i \end{cases}$$

On remplace dans (2.6) on obtient :

$$\Omega = +\frac{\pi}{2}i - \ln(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda - 1}),\tag{2.7}$$

L'équation (2.7)

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow e^{\Omega} &= e^{\frac{\pi}{2}i} e^{1 - \ln(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda - 1})} \\ \Rightarrow e^{\Omega} &= i \frac{1}{(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda - 1})} \\ \Rightarrow e^{\Omega} &= i \frac{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda - 1})}{(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda - 1})(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda - 1})} \\ \Rightarrow e^{\Omega} &= i(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda - 1})\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
&\implies (\sqrt{\lambda} + ie^\Omega)^2 = (-\sqrt{\lambda-1})^2 \\
&\implies \left(\lambda - e^{2\Omega} - \frac{2}{i}\sqrt{\lambda}e^\Omega \right) = \lambda - 1 \\
&\implies \left(\frac{1 - e^{2\Omega}}{2e^\Omega} \right) i = \sqrt{\lambda} \\
&\implies \sqrt{\lambda} = i \sinh(\Omega)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\lambda = -\sinh^2(\Omega) \quad (2.9)$$

• On va chercher une relation entre λ et f :

On transforme le plan de l'écoulement dans le plan f au plan de l'écoulement λ tels que les points A , B , C et D dans plan f se transforment aux points $A = 0$, $B = \infty$, $C = 1$ et $D = 0$ dans le plan λ (*figure2.6*).

On utilise la transformation de *Schwarz - Christoffel* qui donne

$$\begin{aligned}
f &= \alpha_1 \int (\lambda - 0)^{\frac{\pi}{\pi}-1} (\lambda - 1)^{\frac{\pi}{\pi}-1} d\lambda + \beta_1 \\
f &= \alpha_1 \int \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda-1)} + \beta_1 \\
f &= \alpha_1 \left(\int \frac{d\lambda}{\lambda-1} - \int \frac{d\lambda}{\lambda} \right) + \beta_1 \\
f &= \alpha_1 \ln \left(\frac{\lambda-1}{\lambda} \right) + \beta_1 \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Pour déterminer les constantes α_1 et β_1 on effectue :

On choisit le point $B(\lambda = \infty, f = 0)$ on et le point en $(\lambda = \frac{1}{2}, f = \frac{Uk}{2})$ trouve :

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \ln \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) + \beta_1 \\ \frac{Uk}{2} = \alpha_1 \ln \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \beta_1 \end{cases}$$

On a: $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) = 0$ quand $\beta_1 \rightarrow \infty$ alors:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{Uk}{2\pi i} \\ \beta_1 = 0 \end{cases}$$

Où k est une constante à déterminer par la correspondance entre les positions du point C dans le plan .

On remplace dans (2.10) en obtient :

$$f = \frac{k}{2\pi i} \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) \quad (2.11)$$

$$\implies \frac{2\pi f}{k} i = \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} \right)$$

$$\implies e^{\frac{2\pi f}{k} i} = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 1 - e^{\frac{2\pi f}{k} i},$$

donc

$$\lambda = \frac{1}{1 - e^{2\pi f i / K}}. \quad (2.12)$$

• **La recherche de la relation entre z et λ :**

On utilise la fonction de kirchoff :

$$\Omega = \log \left(U \frac{dz}{df} \right)$$

$$\implies e^{\Omega} = U \frac{dz}{df}$$

Alors :

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} e^{\Omega}$$

On a :

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{kU}{2\pi i} \left(\frac{1}{\lambda(\lambda - 1)} \right)$$

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda}. \quad (2.13)$$

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{1}{U} e^{\Omega} \cdot \frac{kU}{2\pi i} \left(\frac{1}{\lambda(\lambda - 1)} \right)$$

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{e^{\Omega} k}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\lambda(\lambda - 1)}$$

On utilise la relation (2.8) alors:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{d\lambda} &= \frac{k}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} i(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1}) \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{k}{2\pi} \cdot -\frac{1}{\lambda(1-\lambda)} (\sqrt{\lambda} - i\sqrt{1-\lambda}) \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{k}{2\pi} \cdot \left[-\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda(1-\lambda)} + i\frac{\sqrt{1-\lambda}}{\lambda(1-\lambda)} \right] \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{k}{2\pi} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)} + i\frac{1}{\lambda\sqrt{1-\lambda}} \right] \\
dz &= \frac{k}{2\pi} \cdot \left[-\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)} + i\frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{1-\lambda}} \right] \tag{2.14}
\end{aligned}$$

$$\int dz = \frac{k}{2\pi} \cdot \left[\int -\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)} + i \int \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{1-\lambda}} \right] \tag{2.15}$$

On pose :

$$I_1 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)}, \quad I_2 = \int \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{1-\lambda}}$$

On calcule I_1 :

$$I_1 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)}$$

On utilise le changement de variable :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda} &= t \Rightarrow \lambda = t^2 \\
\Rightarrow d\lambda &= 2t dt,
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{2t}{t(1-t^2)} dt \\
&= \int \frac{2}{(1-t^2)} dt \\
&= \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \\
\Rightarrow I_1 &= \ln \left(\frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}} \right).
\end{aligned}$$

On calcule I_2 :

$$I_2 = \int \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{1-\lambda}}$$

On utilise le changement de variable :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\lambda} &= t \implies 1-\lambda = t^2 \\ \implies d\lambda &= -2t dt,\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \frac{-2t}{(1-t^2)t} dt \\ &= -\int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{1+t} \\ &= \ln(1-t) - \ln(1+t) \\ &= -\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\end{aligned}$$

alors :

$$I_2 = -\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}}\right)$$

donc l'équation (2.15) devient :

$$z - z_0 = \frac{k}{2\pi} \left[-\ln\left(\frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}\right) - i \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}}\right) \right]. \quad (2.16)$$

On a $z_0 = ik$. Alors:

$$\begin{aligned}x + iy &= \frac{k}{2\pi} \left[-\ln\left(\frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}\right) - i \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}}\right) \right] + ik \\ \implies &\begin{cases} x = -\frac{k}{2\pi} \log\left(\frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}\right) \\ y = -\frac{k}{2\pi} \log\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}}\right) + k \end{cases} \quad (3.16)\end{aligned}$$

On écrit : $\bar{x} = -\frac{x}{k}$, $\bar{y} = -\frac{y}{k}$, l'équation (3.16) devient :

$$\begin{cases} \bar{x} = -\frac{x}{k} = \frac{k}{2\pi} \log\left(\frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}\right) \\ \bar{y} = -\frac{y}{k} = \frac{k}{2\pi} \log\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}}\right) + k \end{cases} \quad (3.17)$$

qui est l'équation paramétrique de la surface libre.

Chapitre 3

Solution numérique d'un problème de cavité par la méthode intégrô-différentielle

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique du problème considéré, en tenant compte des forces de la tension de surface et on garde la gravité g est nulle en utilisant la méthode intégrô-différentielle.

3.2 Formulation du problème

3.2.1 Première étape

Soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au devient une Plaque verticale. L'écoulement forme par la suite derrière l'obstacle une cavité qui s'étent vers l'infini. Nous supposons que lorsque x tend vers l'infini, la vitesse s'approche de la vitesse uniforme U , et que la pression à l'intérieur de la cavité est constante.

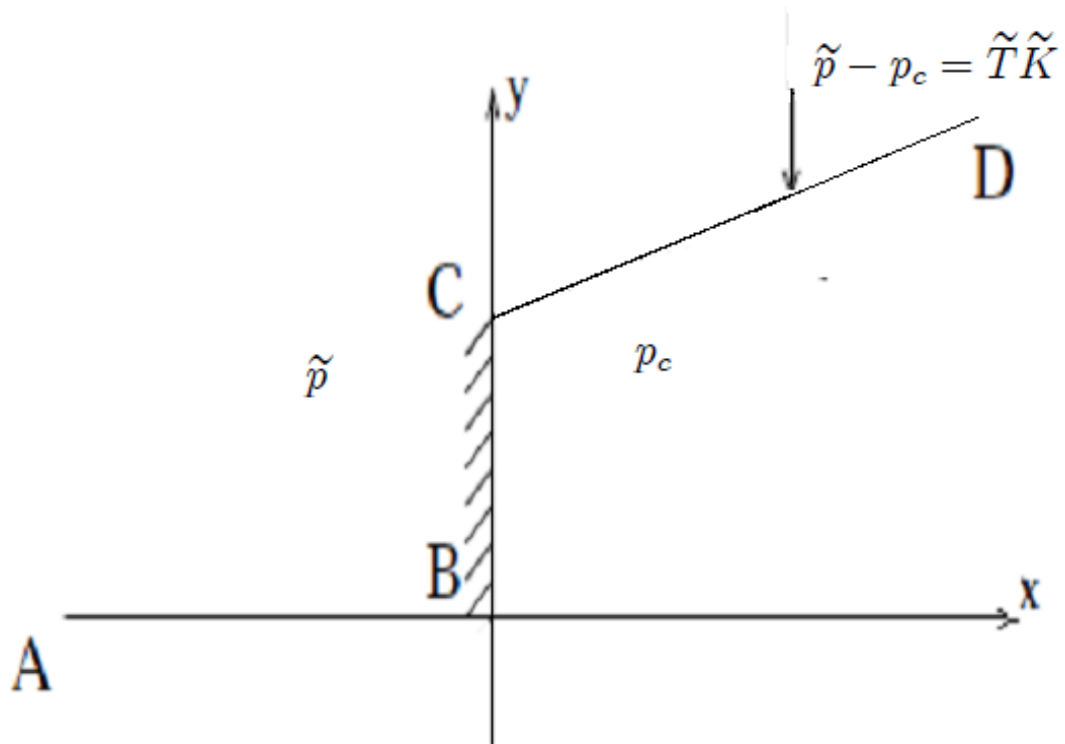


Figure 3.1: Schéma d'écoulement et des coordonnées cartésiennes.

La condition de Bernoulli sur la surface libre devient :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + \frac{\tilde{p}_\infty}{\tilde{\rho}} = cst. \quad (3.1)$$

Où $\tilde{p}, \tilde{p}_\infty$ désignant respectivement la pression du fluide sur la surface libre et la pression à l'infini, \tilde{q} le module de vitesse $\tilde{q} = \sqrt{\tilde{u} + \tilde{v}}$.

Sur la (Figure 3.1), On peut la voir que la différence de pression est entre la pression de fluide \tilde{p} et la pression de cavité p_c .

La différence de pression est équilibrée par la tension de surface multipliée par la courbure K , considérée comme positive si le centre de courbure se trouve dans le fluide. L'utilisation de cette information donne

$$\tilde{p} - p_c = \tilde{T}K = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}}. \quad (3.2)$$

Où \tilde{R} est le rayon de courbure et \tilde{T} la tension de surface.

En substituant (3.2) dans (3.1) on trouve :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{T}K + p_c}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + \frac{\tilde{p}_\infty}{\tilde{\rho}}. \quad (3.3)$$

On a l'equatoion (3.3) n'est pas dimensionné, on choisi \tilde{U} comme unité de vitesse et \tilde{H} comme unité de longueur. Les variables sans dimension sont :

$$\begin{cases} q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{U}} \\ R = \frac{\tilde{R}}{\tilde{H}} \end{cases}$$

En substituant les relations ci-dessus dans (3.3) on trouve :

$$\frac{1}{2}(\tilde{U}q)^2 + \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}R\tilde{H}} + \frac{p_c}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + \frac{\tilde{p}_\infty}{\tilde{\rho}} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{2}(\tilde{U}q)^2 + \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}R\tilde{H}} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + \frac{\tilde{p}_\infty}{\tilde{\rho}} - \frac{p_c}{\tilde{\rho}} \quad (3.5)$$

En divisant (3.5) par \tilde{U}^2 et en introduisant une nouvelle constante sur le côté droit de (3.5), donne:

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}R\tilde{H}\tilde{U}^2} = \frac{1}{2} + c_p, \quad (3.6)$$

où

$$c_p = \frac{\widetilde{p}_\infty - p_c}{\widetilde{\rho}\widetilde{U}^2}. \quad (3.7)$$

Le plan $x'ox$, $y'oy$ du couple (x, y) sera considéré comme de la variable complexe $z = x + iy$. Soit $\vec{V} = (u(x, y), v(x, y))$ le champ du vecteur vitesse de l'écoulement.

Nous introduisons la fonction potentielle de vitesse ϕ et la fonction de courant ψ alors les conditions de Cauchy-Riemann sont données par :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \quad (3.8)$$

La fonction potentielle complexe f définie par :

$$f = \phi(x, y) + i\psi(x, y).$$

tel que $\phi = 1$ au point de séparation C et $\psi = 0$ aux points A, B, C et D . on peut résoudre le problème à la moitié supérieure dans le plan f (*Figure3.2*). quand $\psi = 0$ on a $\phi_B < \phi < \phi_C$ et $\psi = 0$ sur la surface libre $\phi_C < \phi < \phi_D$.

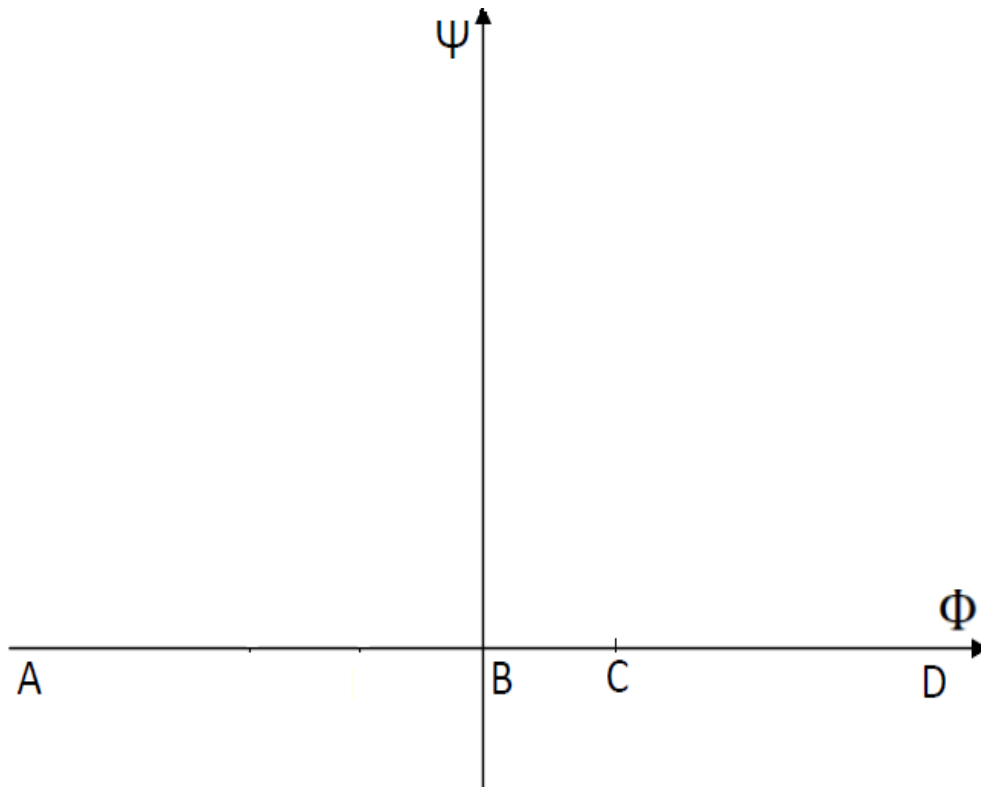


Figure 3.2: Le problème sur le plan f

La condition limite cinématique, transformée pour s'adapter au plan f est

$$u = 0, \quad \psi = 0, \quad 0 < \phi < \phi_C . \quad (3.9)$$

La relation (3.8) implique que la fonction complexe $\xi = u - iv$ et la fonction potentielle f sont des fonctions analytiques de variable $z = x + iy$. on reformule ce problème à l'aide d'une méthode des integro-différentiels on introduit la variable complexe $\tau - i\theta$ écrit sous forme :

$$\xi = u - iv = e^{\tau - i\theta}. \quad (3.10)$$

Où θ désigne l'angle entre le vecteur de vitesse et l'horizontale. Avant d'écrire l'équation (3.6) par les nouvelles variables τ et θ , nous montrons que :

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| e^\tau$$

Désignons par $\vec{\eta}$ le vecteur de vitesse, de coordonnées $(e^\tau \cos \theta, e^\tau \sin \theta)$.

On a :

$$\vec{\eta} = \vec{e}_T |\vec{\eta}|$$

Où \vec{e}_T est le vecteur unitaire tangentiel, on déduit que :

$$\vec{e}_T = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

On a aussi par définition :

$$\frac{d\vec{e}_T}{ds} = K \vec{N} = \frac{1}{R} \vec{N}$$

Où \vec{N} désigne le vecteur normal à la courbe et ds élément de longueur d'arc de la ligne de courant CD donc:

$$1 = R \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = R \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| \frac{1}{|\vec{\eta}|}$$

i.e.,

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| e^{-\tau} \quad (3.11)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| &= \left| -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta \vec{i} + \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \vec{j} \right| \\ &= \left| \frac{d\theta}{dt} e^{-i\theta} \right| \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

En substituant l'expression ci-dessus dans (3.11) on trouve :

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\theta}{dt} \right| e^{-\tau}$$

comme

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\theta}{dy} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{d\theta}{d\phi} \left(\frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{d\theta}{d\phi} e^{2\tau} \end{aligned}$$

sur la surface libre (CD)

car

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\eta} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} = e^\tau \cos \theta \vec{i} + e^\tau \sin \theta \vec{j}$$

Donc

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| e^\tau \quad (3.12)$$

D'après (3.12) et (3.10) l'équation de Bernoulli (3.6) s'écrit :

$$\frac{1}{2} e^{2\tau} + \delta e^\tau \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{1}{2} + c_p. \quad (3.13)$$

Où $\delta = \tilde{T}/\tilde{\rho}\tilde{H}\tilde{U}^2$

3.2.2 Deuxième étape

On applique la formule intégrale de Cauchy sur la fonction complexe $\tau - i\theta$ on a

$$\tau(\phi_0, 0) - i\theta(\phi_0, 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau(\phi, \psi) - i\theta(\phi, \psi)}{f - \phi_0} df \quad (3.14)$$

Le contour Γ est un simple et fermé constitué de l'axe réel $\psi = 0$ du plan f , avec une indentation circulaire sur le point ϕ_0 et un demi cercle de rayon arbitraire R , s'étendant dans le demi-plan supérieur. Prenant la limite de (3.14) avec ce contour particulier, comme $R \rightarrow \infty$ on a

$$\tau(\phi_0, 0) - i\theta(\phi_0, 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau(\phi, 0) - i\theta(\phi, 0)}{\phi - \phi_0} d\phi \quad (3.15)$$

Cette intégrale est une valeur principale de Cauchy. En considérant seulement la partie réelle de (3.15) on a

$$\tau(\phi_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\theta(\phi)}{\phi - \phi_0} d\phi \quad (3.16)$$

On note $\tau(\phi_0) = \tau(\phi_0, 0)$ et $\theta(\phi) = \theta(\phi_0, 0)$, Il convient également noter que ϕ_0 est un point arbitraire sur l'axe réel $\psi = 0$.

En utilisant (3.10), la condition limite cinématique (3.9) deviennent

$$\theta = 0 \quad -\infty < \phi < 0 \quad \text{et} \quad \psi = 0 \quad (3.17)$$

$$\theta = \pi/2 \quad 0 < \phi < \phi_C \quad \text{et} \quad \psi = 0 \quad (3.18)$$

$$\theta = \text{inconnu} \quad \phi_C < \phi < \phi_D \quad \text{et} \quad \psi = 0 \quad (3.19)$$

En remplaçant ces conditions par la forme intégrale de τ représentée en (3.16) , donne

$$\tau(\phi_0) = -\frac{1}{2} \int_0^{\phi_C} \frac{d\phi}{\phi - \phi_0} - \frac{1}{\pi} \int_{\phi_C}^{\phi_D} \frac{\theta(\phi)}{\phi - \phi_0} d\phi. \quad (3.20)$$

Le première intégrales dans (3.20) peuvent être évaluée analytiquement de la manière suivante

$$\tau(\phi_0) = -\frac{1}{2} (\ln |\phi - \phi_0|)_0^{\phi_C} - \frac{1}{\pi} \int_{\phi_C}^{\phi_D} \frac{\theta(\phi)}{\phi - \phi_0} d\phi. \quad (3.21)$$

Ce qui implique que

$$\tau(\phi_0) = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\phi_C - \phi_0}{\phi_0} \right| - \frac{1}{\pi} \int_{\phi_C}^{\phi_D} \frac{\theta(\phi)}{\phi - \phi_0} d\phi. \quad (3.22)$$

En remplaçant (3.22) dans (3.13), en crée une équation integro-différentielle et elle est résolue numériquement dans la section suivante.

3.3 Procédure numérique

L'équation integro-différentielle ci-dessus est résolu numériquement. L'objectif sera de créer un maillage uniforme le long de la surface libre et de calculer les valeurs τ à ces points. on utilise (3.13) pour créer un système d'équations non linéaires qui est résolu à l'aide d'une méthode itérative. Pour créer un maillage, il est nécessaire de réparer d'abord la longueur de la surface libre. Cela se fait en fixant D . le maillage peut être créé en laissant

$$\phi_I = \frac{\phi_D}{N-1} (I-1) \quad I = 1, \dots, N \quad (3.23)$$

D'après l'intégrale dans (3.22) étant une valeur principale de Cauchy, il y a des singularités qui doivent être négligées. Cela se fait en introduisant des points médians dans le maillage qui a été créé par (3.23), on a

$$\phi_I = \frac{\phi_{I+1} + \phi_I}{2} \quad I = 1, \dots, N - 1 \quad (3.24)$$

On utilisés ces points pour calculer les valeurs de τ , En utilisant (3.22), pour donner

$$\tau_I^m = \tau(\phi_0^m) = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\phi_C - \phi_I^m}{\phi_I^m} \right| - \frac{1}{\pi} \int_0^{\phi_D} \frac{\theta(\phi)}{\phi - \phi_I^m} d\phi. \quad I = 1, \dots, N - 1 \quad (3.25)$$

Comme mentionné précédemment, l'intégrale dans (3.25) est une valeur principale de Cauchy, on peut être approchée cette intégrale à l'aide de la règle trapézoïdale, avec une addition sur ϕ_I . Par conséquent (3.25) devient

$$\tau_I^m = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\phi_C - \phi_I^m}{\phi_I^m} \right| - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\theta_j \Delta w_j}{\phi - \phi_I^m}, \quad (3.26)$$

Où $w_j = 1/2$ pour $j = 1, N$ et $w_j = 1$ sinon. Dans (3.26), $\Delta = \phi_D / (N - 1)$ Le maillage. on remplace (3.26) dans (3.13) Donne un système de $N - 1$ équations non linéaires en $N + 1$ inconnues ϕ_I pour $I = 1, \dots, N$ et c_p . Le système des équations $N + 1$ de $N + 1$ inconnues est résolu à l'aide de la méthode itérative de Newton.

3.4 Conclusion

Dans ce mémoire on étudie la technique de résolution du problème d'écoulement bidimensionnel de type cavité, le fluide est supposé non visqueux et incompressible et l'écoulement est irrotationnel.

On cherche la solution analytique de ce problème dans le cas où les effets de gravité et de la tension de surface sont négligés en utilisant la méthode des lignes de courant libres et la transformation de Schwarz-Christoffel pour trouver la forme de surface libre. On considère que la tension de surface est non nulle, en traitement numérique le problème par la méthode intégrale-différentielle.

Bibliographie

- [1] **Ben Hamouda, Riadh**, Notion de Mécanique des fluides, Cours et Exercices Corrigés, Centre de Publication Universitaire, Tunis 2008.
- [2] **Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia**, Mécanique des fluides, Dunod, Paris, 2011. ISBN 978-2-10-056922-9
- [3] **Damon Merzak**, MSC.PHD.mécanique des fluides,riempression 1996.
- [4] **M. Bourich**, Cours de Mécanique des Fluides, Deuxième édition 2014.
- [5] **Christophe Ancey**, Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides,Laboratoire hydraulique environnementale (LHE). École Polytechnique Fédérale de Lausanne Écublens CH-1015 Lausanne.
- [6] **MURRAY R. SPIEGEL**, VARIABLES COMPLEXES, Cours et problèmes, est traduit de : Theory and Problems of Complex Variables, McGraw-Hill Inc, New York, 1973.
- [7] **C.Brennen, B.A**, Cavitation and other free surface phenomene, Dept. of Engineering Science, Oxford University , September 1966.
- [8] **Laiadi Abdelkader**, effet de tention de surface sur des écoulement au dessus des obstacles, mémoire de magistère de université de Ouargla 2012.
- [9] **T. R. Mogel et R. L. Street**, A Numerical Method for Steady-State Cavity Flows, Journal of Ship Research, Vol. 18, No. 1, March 1974, pp. 22-24.

- [10] **Rimi Khazzani**, Résolution analytique du problémé d'écoulement sans l'effet de gravité, mémoire de Master de université de Ouargla 2016.
- [11] **Scott Tooley**, The Effects Of Surface Tension On Free Surface Flows Intersecting Rigid Walls,the School of Mathematics of the University of East Anglia for the degree of Doctor of Philosophy, July 2002.