UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématiques et numérique

Par

BELOUADAH Assai

Thème

Cauchy's problem and measure of non-compactness

Devant le jury :

Mr. NADIR Mostefa	MCA. Univ de M'sila	Président
Mr. GAGUI Bachir	Prof. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. KHIRANI Amina	MCA. Univ de M'sila	Examinateur
Mr. DJAIDJA Noui	MCB.Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2022 \2023

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail. Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur le **Dr. GAGUI Bachir** qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et de m'a voir guidé. Leurs critiques et Leurs conseils m'ont été trèsprécieux. De même je remercie **NADIR Mostefa** et **KHIRANI Amina** et **DJAIDJA Noui** qu'ils m'ont fait,en acceptant de juger ce travail. Merci à tous les enseignants et les étudiants pour leurs aides judicieuses,les moyens qu'ils ont. Met à notre disposition pour réaliser ce travail.

Enfin à toute personne qui a collaborée à la réalisation ,Du présent mémoire.

Merci

Dédicace

Je dédie ce modeste travail:

*A mes parents

*A mon frère

*A mes soeurs

*A mes amies

*A toute la famille

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et ceux me sont chers.

Assia

Table des matières

Introduction

La mesure de non compacité est une outil très utilisée dans un espace de Banach, elle est largement utilisée sur la théorie du point fixe de but de résoudre une équation différentielle, équation intégrale,et intégro-différentielle, dans ces dernières années, plusieurs travaux on fait la mise au point sur l'étude des équations différentielles fractionnaires.

Dans ce mémoire on va étudier la mesure de non compacité ,cette étude dans le cadre théorique ayant plusieurs applications dans topologie l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs. Elle est apparue la première fois par mathématicien **Kuratowski** en 1930 et après **Hausdorff** en 1957. Notre objectif dans ce sujet comment utilisé la notion de mesure de non compacité pour prouvé l'existence de la solution d'un problème différentielle d'ordre fractionnaire (équation différentielle d'ordre fractionnaire), ou la forme générale est

$$ {}^{c}D^{r}y\left(t\right) = f\left(t, y\right).1 < r < 2 $$

Avec les conditions

$$ y\left(0\right) = y_{0},\ y'\left(0\right) = y_{1}, $$

à l'aide d'une théorie importante i.e.,: la théorie de point fixe notamment le théorème de Darbo, Mönch.....etc.

Le mémoire se compose de trois chapitres qui s'articulent de la façon suivant:

Le premier chapitre, consacré sur la notion de la mesure de noncompacité(mesure de Kuratowski et Hausdorff) et leurs propriétés ainsi la relation entre les ensembles compactes, relativement compacts au sens topologique et au sens mesure, et ainsi les propriétés des opérateurs par la vision de la mesure de non compacité et en finir par la théorie du point fixe .

Le deuxième chapitre, est consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire, telles que:l'intégration fractionnaire,la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville,Caputo et Katugampola, on présentera leurs propriétés et on précisera aussi la relation entre ces trois approches,qui sont les plus utilisées.

Le dernier chapitre, on va essayer d'appliquer la notion de la mesure de non compacité sur les problèmes différentiels précisément sur les équations différentielles d'ordre fractionnaires.

Enfin, le mémoire sera clôturé par une Bibliographie.

Chapitre 1

Notions sur la mesure de non compacité

Dans ce chapitre,nous rappelons brièvement la notion de compacité puis introduisons les opérateurs compacts entre les espace de Banach. Nous donnons en suite un résultat fondamental de compacité pour les fonctions continues;le théorème (Arzela-Ascoli) et quelques définitions sur la mesure de non compacité,et on termine par un rappel de théorèmes de point fixe.

1.1 Notions et définitions

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et notations que nous utilisons par la suite.

Soit(X,||.||) un espace de Banach, notons par A un sous-ensemble de X, et ∂A la frontière de A

De plus, le diamètre de A et leur distance,

$$\text{diam(A)} = \sup\{||x-y||; x, y \in A\}$$

$$\text{dist}(x, A) = \inf\{||x-y||; x, y \in A\}$$

Si A est un sous-ensemble de X,alors$\bar{A}$ est conv $\bar{A}$ sont la fermeture et l'adhérence de l'enveloppe convexe da A (respectivement), notons par

$$\mathrm{B}_r\,(X, A) = \mathrm{B}_r \ = \{x \in X \ ; ||x-a|| \leq r\} \ \ ,$$

$$\mathrm{B}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{B}(\mathrm{X}) = \mathrm{B}_X$$

La boule fermé dans X de centre a et de rayon r et

$$\underset{r}{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) = \partial \underset{r}{\mathrm{B}} = \{x\,\mathrm{X}; ||x|| = r\}$$

$$\underset{1}{\mathrm{S}}(\mathrm{X}) = \mathrm{S}(\mathrm{X}) = \underset{X}{\mathrm{S}}$$

La sphère dans X .

Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension infini et on noté l'ensemble des opérateur linéaire de X dans Y par L (X, Y) , $\mathrm{L}(X) = \mathrm{B}(X, X)$ un opérateur linéaire T défini sur X dans Y

1.2 Notions sur les opérateurs

1.2.1 Compacité

Définition 1.2.1 *Soit* U *un ensemble d'un espace normé* X, U *est dit compact si de tout recouvrement de* U *par des ouverts de* U, *on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e:*

$$\forall\, \mathrm{V}_{j,}, j \in \mathrm{J}(\text{ouverts}) \text{ tels que } \mathrm{U} \subset \cup_{j\in J} \mathrm{V}_{j(k)}, \quad \mathrm{j(k)}=1,2,..........,\mathrm{n}$$
$$\text{tel que U} \quad \subset \cup_{k=1}^{n} \mathrm{V}_{\mathrm{j(k)}}$$

Définition 1.2.2 *1. Une classe de sous-ensemble de* E *s'appelle une couverture d'un ensemble G de E ,si nous avons $G \subset \cup_j U_j$*

2. Un ensemble U est dit séquentiellement compact si pour tout suit d'éléments dans E contient une sous -suite converge vers un élément dans U.

3. Un sous ensemble d'un espace normé est compact si et seulement si il est séquentiellement compact.

4. *Un sous-ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compact.*

5. *Un sous-ensemble G d'un espace normé est totalement borné si il existe une suite finie i,e:*

$$\forall \varepsilon > 0 : G \subset \cup_{j=1}^{n} B\left(\varphi_{j,\varepsilon}\right).$$

Définition 1.2.3 *(**Opérateur Compact**): Soit Aun opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y ,on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un ensemble relativement compact dans Y.*

Définition 1.2.4 *(**Opérateur Linéaire**) : Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes: Condition additive:*

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, on\ a\ A\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) = A\left(\varphi_1\right) + A\left(\varphi_2\right).$$

Condition homogène:

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \Bbbk = \left(\mathbb{R} ou \mathbb{C}\right), on\ a\ A\left(\lambda\varphi\right) = \lambda A\left(\varphi\right).$$

Définition 1.2.5 *(**Opérateur borné**): Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s' il existe une constante positive $C \succ 0$, tel que :*

$$\left\|A\left(x\right)\right\|_F \preceq C \left\|x\right\|_E, \forall x \in E$$

1.2.2 Compacité dans $C(G)$

Dans cette partie, l'espace des fonctions continues définies dans $C(G)$ est muni de la norme maximum,

$$\left\|\varphi\right\|_\infty = \max\left|\varphi\left(x\right)\right|.$$

Théorème 1.2.1 *(**Bolzano-Weiertrass**):Un espace métrique (X, d)est compact si et seulement si toute suite d'éléments de Xadmet une sous -suite convergente.*

Théorème 1.2.2 *(**Arzela-Ascoli**):Un ensemble $U \subset C(G)$ est relativement compact si et seulement si les condition suivants sont vérifies i,e:*
1. L'ensemble U est borné telle que :

$$\forall \varphi \in U : \forall x \in k, \exists M > 0 : |\varphi(x)| \leq M \ .$$

2.L'ensemble U est équicontinu ,

$$: \ \forall \epsilon > 0 : \forall \varphi \in U : \forall x, y \in k : \exists \delta > 0 \ telleque : \mid x - y \mid > \delta \rightarrow \mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid \leq \epsilon$$

Définition 1.2.6 *:Soit A un opérateur linéaire d'un espace norme X dans un espace norme Y,on dit que Aest un opérateur compact d'il envoie tout ensemble borné G dans X un ensemble relativement compact $A(G)$dans Y. Autrement dit ,la fermeture $\bar{A}\left(\bar{G}\right)$ est compact.*

Définition 1.2.7 *:Un ensemble $G \subset X$ est relativement compact si pour toute suite $\{\varphi_n\}$ il existe une sous suite $\left\{\varphi_{n(k)}\right\}$ qui converge dans Y.*

Définition 1.2.8 *Un opérateur A de$X$ dans Y est compact si et seulement si pour toute suite bornée$\{\varphi_n\}$ de X ,la suite $\{A\varphi_n\}$ contient une sous suite convergent dans Y*

1.3 Mesure de non compacité:

La mesure de non compacité est un outil très utile dans les espaces de Banach, ils sont largement utilisé dans la théorie du point fixe ,les équations différentielles ,les équations fonctionnelles, les intégrales et équations integro-différentielles,.....etc([7, 7])

1.3.1 Mesure de non compacité en général

Avant de rappeler la mesure de non compacité, on note par $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, nous désignons par M_X la famille des sous-ensembles bornées non vide de$X$, et par N_X la famille des sous-ensemble relativement compact de X, et l'enveloppe convexe d'un ensemble $A \subset X$ notons par conv(A).

Définition 1.3.1 *:Une application $\mu : M_X \rightarrow [0, +\infty[$,est appelée mesure de non compacité dans l'espace X,qui satisfait les condition suivantes: La famille*

$$\ker(\mu) := \{D \in M_X \ telle \ que{:}\mu(D) = 0\} \neq \phi, et \ker(\mu) \subset N_X$$

(ker est appelé le noyau de MNC)

Théorème 1.3.1 *:Soit A,B*$\in M_X$*, alors:*

1. Si $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$.

2.$\mu(\bar{A}) = \mu(A)$.

3.$\mu(\overline{\text{conv}\, A}) = \mu(A)$.

4.$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \leqslant \lambda\mu(A) + (1-\lambda)\mu(B), \lambda \in [0,1]$.

5.μ est dit semi-norme si $\left\{ \begin{array}{c} \mu(\lambda A) = |\lambda|\, \mu(A)(\mu\text{est dit homogène}) \\ \mu(A+B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)\, (\mu\text{est dit sub additif}) \end{array} \right\}$

6.Si(A_n) ensemble de suite de M_X telle que $A_{n+1} \subset A_n (n = 1, ..., n)$ et $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, alors $A_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ et $A_\infty \in \ker(\mu)$.

Définition 1.3.2 *:*

1\ Une mesure de non compacité est appelée mesure avec la propriété maximale, si $\max(\mu(A), \mu(B)) = \mu(A \cup B)$

2\ Une mesure de non compacité est dit régulière, si $\ker(\mu) = N_X$,sup *linéaire et possède une propriété maximal.*

3\ Une mesure de non compacité est lipschitzienne, si elle satisfait la condition de Lipschitz

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \mu(B(X))\, d_H(A, B)$$

Avec:

$$d_H(A,B) = \max\left\{\sup d_{x\in A}(x,A), \sup_{y\in B} d(y,A)\right\}$$

et:

$B\ (X)$la boule fermée dans X et de centre Xet de rayon 1.

1.4 Mesure de non-compacité de Kuratowskii

Kuratowskii fut le premier(1930) a introduire et étudier la notion de la mesure de non-compacité([16])

Définition 1.4.1 *:La mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné* $A \in M_X$ *,notée* $\alpha(A)$ *,est définie par:*

$$\alpha(A) = \inf\{\forall\epsilon < 0 : A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i, B_i \subset X, \operatorname{diam}(B_i) < \epsilon, i = 1, 2, ..., n\}$$

désigne le diamètre de l'ensemble B_i *,*$\alpha(A) = \inf\{\epsilon < 0 :$ *admet une recouvrement fini par des ensembles est sous ensemble de* X *et* $B \in M_X$*.On notera que, dans cette définition, l'expression peut être remplacée par* $\operatorname{diam} B_i < \epsilon$*.Il est clair que* $\alpha(A) \leq \operatorname{diam} A$ *pour tout ensemble borné* A *dans* M_X *et que* $\alpha(A) = 0$ *si* A *est fini. Les propriétés essentielles de la mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné sont résumées dans le théorème suivant:*

Théorème 1.4.1 *([16]):Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A, A_1, A_2 \in M_X$ *, alors*

1. $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \bar{A}$ est compact.
2. $A \subset A_1 \Rightarrow \alpha(A) \leqslant \alpha(A_1)$.
3. $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$.
4. $\alpha(A_1 \cup A_2) = \max\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$.
5. $\alpha(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$.
6. Si X est complet,$(F_n)_n$ une suite des ensembles croissantes d'ensembles non vide,fermés et bornés, telles que :

$\lim_n \alpha(F_n) = 0$, alors $F_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ est sous-ensemble non vide et compact.

Démonstration:

1. .Par définition de la mesure de non-compacité.

2. Soit $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0, \{B_i\}_{i=1}^{n}$ un recouvrement fini de l'ensemble A avec $\operatorname{diam} B_i \leq \epsilon_1; i = 1, ..., n$

et $\{\varphi_j\}_{j=1}^{m}$ un recouvrement fini de l'ensemble A_1avec $\operatorname{diam} \varphi_j \leq \epsilon_2; j = 1, ..., m$

Puisque $A \subset A_1$,on peut toujours choisir les φ_j ,telle que:

$$A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i \subset \cup_{j=1}^{m} \varphi_j$$

Ceci implique $\alpha(A) < \epsilon_2$, Par conséquent ,$\alpha(A) \leq \alpha(A_1)$.

3. Puisque $A \subset \bar{A}$ alors $\alpha(A) \leq \alpha(\bar{A})$ d'après l'assertion 2, il suffit de démontrer l'inégalité dans l'autre sens:$\alpha(\bar{A}) \leq \alpha(A)$ Soit $\epsilon > 0$ Avec $\operatorname{diam} B_i \leq \epsilon$;Pour i=1,...,n ,on a

$$A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{\cup_{i=1}^{n} B_i} = \cup_{i=1}^{n} \bar{B}_i$$

Comme $\operatorname{diam} B_i = \operatorname{diam} \bar{B}_i$,on déduit que $\alpha(A) < \epsilon$,par conséquent $\alpha(\bar{A}) \leq \alpha(A)$.

4. D'après l'assertion 2, on a

$$A_1 \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow \alpha(A_1) \leq \alpha(A_1 \cup A_2)$$

$$A_2 \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow \alpha(A_2) \leq \alpha(A_1 \cup A_2).$$

Donc

$$\max(\alpha(A_1), \alpha(A_2)) \leq \alpha(A_1 \cup A_2).$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens ,soit $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0, r = \max(\alpha(A_1), \alpha(A_2))$ et considérons $\{B_i\}_{i=1}^{n} = \{\overline{\varphi_j}\}_{j=1}^{m}$ des recouvrements finis des ensemble A_1, A_2 respectivement avec $\operatorname{diam} B_i < \epsilon_1$ pour i=1,...,n et $\operatorname{diam} \varphi_j \leq \epsilon_2$ pour j=1,...,m on a $\operatorname{diam} B_i < r + \epsilon$ et $\operatorname{diam} \varphi_j < r + \epsilon$ pour i=1,...,n et $\operatorname{diam} \varphi_j \leq \epsilon_2$ pour j=1,...,m. par conséquent,

$$A_1 \cup A_2 \subset (\cup_{i=1}^{n} B_i) \cup (\cup_{j=1}^{m} \varphi_j) \Rightarrow A_1 \cup A_2 \subset \cup_{k=1}^{l} G_k < r + \epsilon.$$

D'où:

$$\alpha(A_1 \cup A_2) \leq \max\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}.$$

.

5. Utilisons l'assertion 2 ,on obtient :

$$A_1 \cap A_2 \subset A_1 \Rightarrow \alpha(A_1 \cap A_2) \leq \alpha(A_1)$$

$$A_1 \cap A_2 \subset A_2 \Rightarrow \alpha(A_1 \cap A_2) \leq \alpha(A_2)$$

D'où:

$$\alpha(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$$

6. Montrons que F_∞ est non vide ,Choisissons,pour chaque n ,un élément $x_n \in F_n$. Posons $X_n = \{x_i, i \geqslant n \}$ .Puisque $X_n \subset F_n$ alors $\alpha(X_n) \leq \alpha(F_n); \forall n$. Par passage a la limite, on obtient $\alpha(X_1) = 0$. C'est a dire X_1 est relativement compact .Donc la suite $(X_n)_n$ contient une sous-suite $(X_{nk})_k$ convergente dans X. Soit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Comme F_∞ est un sous-ensemble fermé de X alors $x \in F_n; \forall n$. Ceci implique que $F_\infty \neq \emptyset$.

Montrons maintenant que F_∞ est compact .Comme $F_\infty \subset F_n; \forall n$ alors $\alpha(F_\infty) \leq \alpha(F_n)$ est relativement compact et donc compact puisqu'il fermé.

Si X est un espace normé alors la mesure de non-compacité de Kuratowski vérifie,en outre, les propriétés citées dans la proposition suivante.

Proposition 1.4.1 *:Soit (X, d) un espace normé et $A, A_1, A_2 \in M_X$,alors:*

1. $\alpha(A_1 + A_2) \leq \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$.

2. $\alpha(A + x) = \alpha(A), \forall x \in X$.

3. $\alpha(\lambda A) = \mid \lambda \mid \alpha(A)$.

4. $\alpha(A) = \alpha(\text{conv}(A))$ où conv A désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble A.

Démonstration.

1. Soit $\epsilon_1 \epsilon_2 > 0, A_1 \subset \cup_{i=1}^{n} B_i, A_2 \subset \cup_{j=1}^{m} \varphi_j$ avec diam $B_i < \epsilon_1$ pour i=1,....,n et diam $\varphi_j < \epsilon_2$ pour j=1,....,m.

Alors:

$$A_1 + A_2 \subset \cup_{i=1}^{n} \cup_{J=1}^{m} \left(B_i + \varphi_j\right).$$

Avec:

$$\operatorname{diam}\left(B_i + \varphi_j\right) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2,$$

c'est à dire :

$$\alpha\left(A_1 + A_2\right) \leq \alpha\left(A_1\right) + \alpha\left(A_2\right).$$

.

2. D'une part,en utilisant la assertion précédente on obtient

$$\alpha\left(A + x\right) \leq \alpha\left(A\right) + \alpha\left(\{x\}\right) = \alpha\left(A\right).$$

Et d'une part,

$$\alpha\left(A\right) = \alpha\left(A + x - x\right) \leq \alpha\left(A + x\right) + \alpha\left(\{-x\}\right).$$

D'où

$$\alpha\left(A + x\right) = \alpha\left(A\right), \forall x \in X.$$

3. Considérons $\epsilon > 0, A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i$ avec $\operatorname{diam} B_i < \epsilon$ pour $i = 1, ..., n$ .Alors

pour tout $\lambda \in \Bbbk, \lambda A \subset \cup_{i=1}^{n} \lambda B_i$ et $\operatorname{diam} \lambda B_i = \mid \lambda \mid \operatorname{diam} B_i < \mid \lambda \mid \epsilon$.

C'est à dire :

$$\alpha\left(\lambda A\right) \leq \mid \lambda \mid \alpha\left(A\right).$$

L'autre inégalité est évidente puisque:

$$\alpha\left(A\right) = \alpha\left(\lambda^{-1} \lambda A\right) \leq \mid \lambda^{-1} \mid \alpha\left(\lambda A\right).$$

4. L'inégalité $\alpha(A) = \alpha(\text{con}(A))$ est toujours satisfaite puisque $A \subset \text{con}(A)$

Pour démontrer l'autre inégalité ,$\alpha(\text{con}(A)) \leq \alpha(A)$

Pour A_i sous suite borné de X diam $A_i < d$ pour tout i=1,...,n et $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ on a:

$$\text{con}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_i \in \text{con}(A_i)\,(i = 1, ..., n) \right\}$$

pour $\epsilon > 0$ et

$$A = \left\{ (\lambda_i, ..., \lambda_n) : \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, (i = 1, ..., n) \right\}$$

Puis A sous suit compact de $(\mathbb{R}^n, \shortparallel . \shortparallel_\infty)$ où $\shortparallel \lambda_1, ..., \lambda_n \shortparallel = \max_{1 \leq i \leq n} \shortmid \lambda_i \shortmid$.([15])([4])

1.5 Mesure de non-compacité de Hausdorff:

En 1957,Goldenstein,Goh'berg et Markus ont introduit une autre mesure de non-compacité appelée mesure de non-compacité de Hausdorff.

Définition 1.5.1 *La mesure de non-compacité de Hausdorff d'un ensemble borné* $A \in M_X$*,notée* $\chi(A)$*, est définie par:*

$$\chi(A) = \inf\left\{\epsilon > 0 : A \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon, i = 1, ..., n\right\}.$$

Où:$B(x_i, r_i)$ désigne la boule de centre x_i et de rayon r_i.

où:

$$\chi(A) = \inf\{\epsilon > 0, B \text{ admet un recouvrement fini des boules de rayons} < \epsilon\}$$

avec B est la famille des sous espace fermés de X et $B \in M_X$.Dans cette définition ,l'inégalité $r_i < \epsilon$,peut être remplacée par $r_i < \epsilon$,De plus les centres x_i des boules qui recouvrent l'ensemble A ne sont pas forcement dans l'ensemble($Ax_i \in X$, en général) .

Les propriétés fondamentales de la mesure de non-compacité de Hausdorff sont données par le théorème suivant:

Théorème 1.5.1 *:Soit*(X, d) *un espace de Banach et soit* A, A_1, A_2 *des sous ensembles bornés.*

1. Si est fini$A$ alors:$\chi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ totalement bornée$\Leftrightarrow \bar{A}$ est compact.
2. Si Aest fini,alors $\chi(A) = 0$.
3. $A \subset A_1 \Rightarrow \chi(A) \leq \chi(A_1)$
4. $\chi(A) = \chi(\bar{A}) = \chi(\text{con}(A))$.
5. $\chi(A_1 \cup A_2) = \max\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$.
6. $\chi(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$
7. Si Xest complet ,$(F_n)_n$une suite décroissante d'ensembles non vides, fermés et bornés telle que :$\lim_n(F_n) = 0$,alors$F_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ est un sous-ensemble non vide et compact.

Démonstration.

1. Les assertions 1et2 sont évidentes d'après la définition de la mesure de non-compacité.

3. Soit $A \subset A_1$,Bun $\epsilon-$ réseau fini deA_1, alors Best aussi fini un $\epsilon-$réseau fini de A_1,et d'après définition de la mesure de non-compacitéχ ,on obtient :$\chi(A) \leq \chi(A_1)$.

4. D'après le point précédent ,on a:

1.

$$A \subset \bar{A} \Rightarrow \chi(A) \leq \chi(\bar{A})$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens, soit $\epsilon > 0, B(x_i, r_i)$ des boules de centre x_i et de rayon r_i ,tels que $A \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), r_i < \epsilon$ Pour $i = 1, ..., n$ .Alors on a

$$\bar{A} \subset \overline{\cup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)} = \cup_{i=1}^{n} \bar{B}(x_i, r_i).$$

Ceci implique que,$\chi(\bar{A}) < \epsilon$,Par conséquent,$\chi(\bar{A}) \leq \chi(A)$.

5. Soit $\{x_1, ..., x_n\}$ un $\epsilon-$réseau fini de A_1 ,$\{y_1, ..., y_m\}$un $\mu-$réseau fini de A_2

Alors $\{x_1, ..., x_n\} \cup \{y_1, ..., y_m\}$ est un ϵ_1-réseau fini de$(A_1 \cup A_2)$ où $\epsilon_1 = \max\{\epsilon, \mu\}$

6. C'est évident ,puisque

$$A_1 \cap A_2 \quad \subset \quad A_1 \Rightarrow \chi\left(A_1 \cap A_2\right) \leq \chi\left(A_1\right)$$
$$A_1 \cap A_2 \quad \subset \quad A_2 \Rightarrow \chi\left(A_1 \cap A_2\right) \leq \chi\left(A_2\right)$$

D'où:

$$\chi\left(A_1 \cap A_2\right) \leq \min\left\{\chi\left(A_1\right), \chi\left(A_2\right)\right\}$$

7. On fait un raisonnement analogue à celui qui a été fait avec la mesure de non-compacité de Kuratowski. Lorsque l'espace X est normé,on démontre alors d'autres propriétés.

Proposition 1.5.1 *Soient X un espace normé $A, A_1, A_2 \in M_X$. Alors:*

1. $\chi\left(A_1 + A_2\right) \leq \chi\left(A_1\right) + \chi\left(A_2\right).$
2. $\chi\left(A + x\right) = \chi\left(A\right), \forall x \in X.$
3. $\chi\left(\lambda A\right) = \mid \lambda \mid \chi\left(A\right), \lambda \in \mathbb{k}.$
4. $\chi\left(A\right) = \chi\left(\mathrm{con}\left(A\right)\right)$,où $\mathrm{con}\left(A\right)$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble A.

Démonstration.

1. Soit $\{x_1, ..., x_n\}$ un $\epsilon-$réseau fini de A_1,$\{y_1, ..., y_m\}$un $\mu-$réseau fini de A_2 Alors l'ensemble $\{x_i + y_i, i = 1, ..., n; j = 1, ..., m\}$ est un $(\epsilon + \mu)-$réseau fini de $\left(A_1 + A_2\right)$.Donc $\chi\left(A_1 + A_2\right) \leq \epsilon + \mu.$
2. Il suffit de démontrer que $\{x_1, ..., x_n\}$un $\epsilon-$réseau fini de A si et seulement si $\{x_1 + x, ..., x_n + x\}$ est un $\epsilon-$réseau fini de l'ensemble$(A + x)$ pour tout $x \in X$.En effet ,soit $x \in X$ et supposons$\{x_1 + x, ..., x_n + x\}$ est un $\epsilon-$réseau fini de l'ensemble$(A + x)$ .Prenons $y \in (A + x)\,; y = y_1 + x$ avec $y_1 \in A$ alors il existe:$(x_i + x) \in \{x_1 + x, ..., x_n + x\}$ tel que $d\left(y_1 + x; x_i + x\right) < \epsilon$. Mais

$$d(y_1 + x; x_i + x) < d(y_1; x_i) + d(x; x) < \epsilon.$$

Par conséquent $\{x_1, ..., x_n\}$ est un $\epsilon-$réseau fini de A .supposons maintenant que $\{x_1, ..., x_n\}$ soit un $\epsilon-$réseau fini de A .Alors ,pour tout $y \in A$, il existe $x_i \in \{x_1, ..., x_n\}$ tel que $d(y; x_i) < \epsilon$.Comme

$$d(y_1 + x; x_i + x) < d(y_1; x_i) + d(x; x) < \epsilon \text{ pour tout } x \in X$$

On déduit que $\{x_1 + x, ..., x_n + x\}$ est un $\epsilon-$réseau fini de l'ensemble$(A + x)$.

3. Cette assertion est évident ,si l'ensemble $\{x_1, ..., x_n\}$est un $\epsilon-$réseau fini de A , alors $\{\lambda x_1, ..., \lambda x_n\}$ est un $\mid \lambda \mid \epsilon-$réseau fini de l'ensemble(λA) ,pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$.

4. Il suffit de démontrer l'inégalité suivante $\chi(\text{con}\, A) \leq \chi(A)$.Soit $\epsilon > 0, \mu > 0$ tel que $\chi(A) < \mu$.Choisissons l'ensemble $\{Z_1, ..., Z_n\}$un $\mu-$réseau de A.Alors $N =$ con $\{Z_1, ..., Z_n\}$ est compact et vérifie $d(x; N) \leq \mu$ pour tout $x \in \text{con}(A)$, mais puisque N est compact on peut trouver un ensemble fini $\{W_1, ..., W_n\}$ qui est un $\epsilon-$réseau de N.

   Donc
$$d(w_i; x) \leq d(x; N) + d(N; w_i) \leq \epsilon + \mu.$$

   C'est à dire $\{W_1, ..., W_n\}$est un $(\epsilon + \mu)-$réseau de con A.L'autre inégalité est satisfaite puisque
$$A \subset \text{con}\, A \Rightarrow \chi(A) = \chi(\text{con}\, A).$$

   La mesure de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff de la boule unité fermée (ou ouverte) sont données dans le théorème suivant:

Théorème 1.5.2 *:Soit X un espace normé de dimension fini et $\bar{B}_x$ la boule unité fermée dans X. Alors:*

1. $\alpha\left(\bar{B}_x\right) = 2.$

2. $\chi\left(\bar{B}_x\right) = 1.$

1.6 Mesure de non compacité sur les opérateurs

Définition 1.6.1 *:Soient $T : D(T) \subseteq X \to X$ un opérateur continu $\alpha(.)$ est la mesure de non compacité de Kuratowski dans X ,pour tout $k > 0$,on dit que Test une contraction si pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$, $T(A)$est un sous-ensemble borné dans X et*

$$\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A).$$

pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$, alors $\alpha(A) > 0, T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X et

$$\alpha(T(A)) < \alpha(A)$$

Définition 1.6.2 *:Soient $T : D(T) \subseteq X \to X$ un opérateur continu $\chi(.)$ est la mesure de non compacité de Hausdroff dans X et $k > 0, T$ est dit K-boule contraction si pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$,$T(A)$est un sous-ensemble borné dans X et*

$$\chi(T(A)) \leq k\chi(A).$$

1. $\frac{1}{2}\alpha(T) \leq \chi(T) \leq 2\alpha(T)$.
2. $\alpha(T) = 0 \Leftrightarrow \chi(T) = 0 \Longleftrightarrow T$ est compact.
3. Si $T, S \in L(X)$,donc $\alpha(TS) \leq \alpha(T)\alpha(S)$ et $\chi(TS) \leq \chi(S)\chi(T)$.
4. Si $k \in K(X)$,donc $\alpha(T + k) = \alpha(T)$ et $\chi(T + k) = \chi(T)$
5. $\alpha(T^*) \leq \chi(T)$ et $\alpha(T) \leq \chi(T^*)$, où T^* désigne l'opérateur dual de T.
6. Si B est un sous-ensemble borné de X, donc $\alpha(T(B)) \leq \alpha(T)\alpha(B)$.
7. Si $A \subset D(T), \alpha(A) > 0$ alors $T(A)$ borné ,

1.7 Quelques théorème de point fixe

Dans cette section on a rappelle quelques outils et résultats d'analyse fonctionnelle utilisés par la suite :principe de contraction de Banach ,équicontinuité,théorème de Schauder, de

Brower résoudre des équations différentielle d'ordre fractionnaire où deuxième membre est non linéaire, nous besoin des théories du point fixe.

On note par $L^1(I,E)$ L'espace de Banach des fonctions mesurables, $y : I \rightarrow E$ qui sont Bochner intégrales, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^T \|y(t)\| \, dt.$$

L'espace de Banach des fonctions mesurables $y : I \rightarrow E$ qui sont bornées est noté par $L^\infty(I,E)$ muni de la norme:

$$\|y\|_\infty = \inf\{c > 0, \|y(t)\| < c, \text{ p.p } t \in J\}.$$

On note par $AC^1(I,E)$ l'espace de Banach des fonctions dérivables $y : I \rightarrow E$,ayant la première dérivée absolument continue.

Définition 1.7.1 *L'application $f : I \times E \rightarrow E$ est dit de Carathéodory si,*

1. $t \rightarrow f(t,u)$ est mesurable $\forall u \in E$.
2. $u \rightarrow f(t,u)$ est continue presque pour tout $t \in I$.
3. $\forall r > 0$,il existe une fonction $\Phi_r \in L^1(I,\mathbb{R}_+)$, telle que $\forall u \in \mathbb{R}$ avec $\|u\| < r$,

$$\|f(t,u)\| \leq \Phi_r(t).$$

Remarque 1.7.1 *Si f vérifier l'assertion 3 ,alors est dite L^1 Carathéodory.*

Définition 1.7.2 *Soit X une espace de Banach on dit que F est contractent* $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ *on a:*

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|, 0 < k < 1$$

Théorème 1.7.1 ***(Scharefer)****.Soient X un espace de Banach l'opérateur $F : X \rightarrow X$ complément continu .Alors F possède au moins un point fixe.*

on dit que F est complètement continu si:

Définition 1.7.3 **i)** $\forall b \in X \Rightarrow F(b)$ *est relativement compacte.*

ii) *Si l'ensemble* $P = \{y \in X, \lambda F(y) = y, \lambda \in [0,1]\}$ *est borné.*

Théorème 1.7.2 ***Définition 1.7.4*** *(**Banach**).Soit* X *une espace de Banach ,et soit l'opérateur*$F : X \to X$ *est contractent alors:*F *admets un point fixe unique:*

$$\exists y^* \in X \text{ telle que } F(y^*) = y^*$$

Théorème 1.7.3 ***Définition 1.7.5*** *(**Schauder**).Soit* $(E; d)$ *un espace métrique complet et* A *une partie convexe fermée de* E *et soit* $F : A \to A$ *,on a si l'ensemble* $\{Fx : x \in A\}$ *est relativement compact dans* E *.Alors* F *possède ou moins un point fixe.*

Définition 1.7.6 *On dit que* A *est convexe:*

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in A$$

Définition 1.7.7 *L'application* $T : C \subset E \to E$ *est dit une* α_E *contraction s'il existe une constante* $k < 1$ *positive telle que :*

$$\alpha_E(T(W)) \leq k\alpha_E(W), (\forall W \text{ fermé et borné})$$

Théorème 1.7.4 *(**Darbo-généralisé**)* C *un sous ensemble non vide, ,fermé,borné et convexe d'un espace de Banach* E *l'application continue*

$$T : C \to C,$$

satisfaisant:

$$\mu(T(W)) \leq \Phi\mu(W), \qquad \forall W \subset C,$$

où μ *une mesure de non compacité arbitraire et* $\Phi : [0,\infty[\to [0,\infty[$*, une fonction strictement croissante (non nécessairement continue),avec:*

$$\lim_n \Phi^n(t) = 0, \quad \forall t \in [0,\infty[.$$

Alors, T *admet au moins un point fixe dans* C*.*

Lemme 1.7.1 *Soit C un sous ensemble non vide, fermé,borné et convexe d'un espace de Banach, $C(I,E)$ et soit G une fonction continue de $I \times I$ et $f : I \times E \to E$ une fonction qui satisfait les conditions de Carathéodory,et il existe $p \in L^1(I;\mathbb{R}_+)$ telle que tout $t \in I$, et tout sous ensemble borné $B \subset E$ on a:*

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha\left(f\left(I_{t,h} \times B\right)\right) \leq p(t)\,\alpha(B)\,; I_{t,h} = [t-h,t] \cap I$$

Si V est un sous ensemble équicontinu de D ,alors:

$$\alpha\left(\left\{\int G(t,s)\,f(s,y(s))\,ds : y \in V\right\}\right) \leq \int_I \shortparallel G(t,s) \shortparallel p(s)\,\alpha(V(s))\,ds.$$

Théorème 1.7.5 *(**Darbo-sadovskii**) Soit C un sous ensemble non vide ,fermé,borné et convexe d'un espace de Banach E et soit l'application continue*

$$T : C \to C$$

une α_E contraction ,alors T admet au moins un point fixe dans C.

Théorème 1.7.6 *(**Mönch**) Soit D un sous espace fermé,borné et convexe d'un espace de Banach, tel que $0 \in D$;et soit N une application continue de D dans D .Si l'implication*

$$V = \operatorname{conv}\overline{N(V)} \text{ ou } V = N(V) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(V) = 0.$$

est vérifiée pour tout ensemble V de D, alors N admet un point fixe dans D.

Chapitre 2

Calculs fractionnaires et équations différentielles d'ordre fractionnaires

2.1 Equation différentielle ordinaire

On appelle l'équation différentielle une équation établissant une relation entre variable indépendante t et la fonction inconnue $x = \varphi(t)$ et ses dérivées $x^{(1)}$,$x^{(2)}$,...,$x^{(n)}$ symbolique une équation différentielles est représente comme suit:[1, bb6]

$$F\left(t, x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\ \right) = 0 \tag{2.1.1}$$

Si la fonction $x = \varphi(t)$ est d'une seule variable indépendante, l'équation différentielles 2.1.1 est dit ordinaire est appelle ordinaire car la fonction a déterminer est une fonction d'un variable.

2.1.1 Ordre de l'équation différentielle

Définition 2.1.1 *On appelle ordre d'un équation différentielle l'ordre le plus élevé de la dérivée dans cette équation:*

2.1.2 Equation différentielle de premier ordre

Définition 2.1.2 *Une équation différentielle de premier ordre est la forme .*

$$F\left(t, x, \dot{x}\right) = 0 \tag{2.1.2}$$

Exemple 2.1.1 *Equation différentielle de premier ordre :*

$$\dot{x} = \cos\left(x + t\right) \tag{2.1.3}$$

2.1.3 Equation différentielle de seconde ordre

Une équation différentielle de seconde ordre est de la forme :

$$F\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}\right) = 0 \tag{2.1.4}$$

Exemple 2.1.2 *Equation différentielle de seconde ordre c constant :*

$$\ddot{x} - t^2 x + c = 0 \tag{2.1.5}$$

Forme normale d'un équation différentielle

On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme:

$$\dot{x} = f\left(t, x\right) \tag{2.1.6}$$

2.1.4 Equation différentielle autonome

On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme:

$$x^{(n)} = \left(x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n-1)}\right) \tag{2.1.7}$$

Autrement dit ,f ne dépendant pas explicitement de t.

2.1.5 Equation différentielle linéaire

Une EDO de type (1) d'ordre n est linéaire si elle est de la forme:

$$a_0\left(t\right) x\left(t\right) + a_1\left(t\right) \dot{x}\left(t\right) + a_2\left(t\right) \ddot{x}\left(t\right) + ... + a_n\left(t\right) x^{(n-1)}\left(t\right) = g\left(t\right) \tag{2.1.8}$$

Avec tous degré1 et tous les coefficients dépendant au plus de t.

2.1.6 Solution d'une équation différentielle

On appelle solution ou intégrale d'un équation différentielle tout fonction $x = \varphi(t)$ de la variable indépendante t, défini sur un intervalle $I =]t_1, t_2[$ et vérifiant identiquement cette équation en tout points de cet intervalle l'intervalle $]t_1, t_2[$ est dit intervalle de définition de la solution $x = \varphi(t)$ (les cas $t_1 = -\infty, t_2 = +\infty$ ne sont pas exclus)

Solution maximales et globales

Définition 2.1.3 *Soit (x, I) et $\left(\tilde{x}, \tilde{I}\right)$ deux solution d'un même équation différentielle ordinaire on dit que $\left(x, \tilde{I}\right)$ est une prolongement de (x, I) et $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{x}\backslash_I = x$*

Définition 2.1.4 *Soient I_1 et I_2 deux intervalle sur $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \subset I_2$ on dit que une solution (x, I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si n'admet pas la prolongement de $\left(\tilde{x}, \tilde{I}\right)$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneqq \tilde{I} \subset I_2$ on verra que même plus tard que I_1 est nécessairement ouvert.*

Définition 2.1.5 *Soit I intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ une solution (x, I) est dit globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier*

Problème de Cauchy général

On appelle problème initial ou problème de Cauchy pour l'équation différentielle 2.1.6 le problème suivant parmi tout les solutions de l'équation 2.1.6 la solution satisfaite à la condition initial 2.1.9 et on écrire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \qquad t = t_0 \end{cases} \tag{2.1.9}$$

2.1.7 Existence et l'unicité pour le problème de Cauchy

Proposition 2.1.1 *Si la fonction f est continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ tout solution de problème de Cauchy est une solution de problème suivent et réciproquement $x \in \mathbb{C}^0(I \times \mathbb{R}^n)$ et*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \tag{2.1.10}$$

Existence et l'unicité locale

Définition 2.1.6 *La fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est Lipchitzienne en X s'il existe une constante L appelée la constante de Lipchitz de f ,telle que*

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L \| x - y \| \; \forall t \in I \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{2.1.11}$$

Théorème 2.1.1 ***(Cauchy-Lipshiz-f Lipshizienne).****Soit I un intervalle ouvert de$\mathbb{R}^n$; continue sur $[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ et lipschitzienne par rapport à x alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ alors il existe une fonction $x \in C^1([t_0, t_0 + a] \forall x, y \in \mathbb{R}^n,)$ qui vérifie:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)) & \forall t \in [t_0, t_0 + a] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1.12}$$

Corollaire 2.1.1 ***(f Lipschitzienne sur tout compact).****Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ bornée ou non borné et $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et Lipschitzienne sur tout compact $k \subset I$ (c'est à dire qu'il existe $L(k)$ telle que $\forall t \in k \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$)*

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L(k) \| x - y \| \tag{2.1.13}$$

Donc pour tout $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique fonction $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ solution de problème 2.1.12

Définition 2.1.7 *Soit la fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et Lipchitzienne par rapport à x sur le cylindre A :*

$$A = \{(t,x), | t - t_0 | \leq a \| x - x_0 \| \leq b\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{2.1.14}$$

Alors l'équation:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1.15}$$

a une unique solution sur $[t_0 + \alpha t_0, -\alpha]$ avec $\alpha = \min\left(\alpha, \frac{b}{m}\right)$ où $m = \sup_{(t,x) \in A} \| f(t,x) \|$

Existence et l'unicité global

Définition 2.1.8 *On suppose $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et globalement Lipchitzienne par rapport à X alors $\forall t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ solution de problème 2.1.12*

2.2 Equations différentielles fractionnaires

Dans cette chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire,telles que:les fonctions spéciales(Gamma,Beta,Mittag-Leffer),l'intégration fractionnaire de Riemann Liouville et de Katugampola, la dérivation fractionnaire au sens Riemann-Liouville,Caputo,Katugampola,qui sont les plus utilisées,Lemmes Fondamentaux et théorèmes de point fixe.[[9, bb9]]

2.2.1 Fonctions spéciales

Fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma est une fonction complexe,considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe(excepte en certains point)

Définition 2.2.1 *On appelle la fonction Gamma ,la fonction définie par:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0).$$

avec $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$.

Exemple 2.2.1 **1.** $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \sqrt{\pi}$ *(posant le changement de variable* $t = \frac{1}{2}s^2$*).*

Lemme 2.2.1 *([11],[12])La fonction Gamma est une fonction de classe* C^{∞} *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *,(resp holomorphe sur le demi plan* $x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0$*) et,*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\text{resp}, x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0), \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Proposition 2.2.1 *([11],[12]) Pour tout* $x \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(x) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *on a:*

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

2. $\Gamma(n+1) = (n)!$.

3. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$.

Preuve.

1. $$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$
$$= x\Gamma(x)$$

2. il suffit d'appliquons 1 pour $x = n$

3.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)...\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)...(1)}{2^n(2n)(2n-2)(2n-4)...(2)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.1 *([11],[12]) La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatifs non entières par la formule* $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ *,la fonction Gamma n'existe pas pour les valeurs négatifs entières.*

Exemple 2.2.2 *1.* $\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}{\frac{-1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$.

2. $\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-3}{2}+1\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{\frac{-3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$.

Fonction Beta d'Euler

Définition 2.2.2 *La fonction Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par:*

$$B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,\qquad (p,q\in\mathbb{C},\operatorname{Re}(p)>0,\operatorname{Re}(q)>0).$$

Proposition 2.2.2 *on a:*

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Preuve. Soit $D=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int\limits_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy\right)\\ &= \iint\limits_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy\end{aligned}$$

en utilisant un changement de coordonnées ,considérons les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=\frac{x}{x+y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} u=uv \\ y=u(1-v)\end{cases},$$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u\end{vmatrix}=-uv-u(1-v)=-u,$

de même que le domaine D' correspondant à D dans les coordonnées u,v est

$$D'=\{(u,v)\,/u\geqslant 0,0\leq v\leq 1\}.$$

alors:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy &= \iint\limits_{D'}(uv)^{p-1}\left[u(1-v)\right]^{q-1}e^{-u}\mid -u\mid dudv\\ &= \iint\limits_{D'}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}dudv\\ &= \left(\int_0^{+\infty}u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\left(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\right)\\ &= \Gamma(p+q)B(p,q),\end{aligned}$$

par conséquent on a:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

Fonction de Mittag-Leffter

Définition 2.2.3 *La fonction simple de Mittag-Leffler est définie par:*

$$E_{\alpha}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\alpha>0.$$

et la fonction de Mittage-Leffter généralisée est définie par:

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\quad \alpha,\beta>0.$$

Exemple 2.2.3

1. $E_1=E_{1,1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x.$
2. $E_2=E_{2,1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(2k)!}=\cosh\sqrt{x}.$
3. $E_{1,2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(k+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{x}(e^x-1).$
4. $E_{1,3}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(k+2)!}=\frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{1}{x^2}(e^x-1-x).$

Théorème 2.2.1 *([11],[12])Pour tout $\alpha=n\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{R}$ on a:*

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}\right)^n E_n(\lambda x^n) &= \lambda E_n(\lambda x^n).\\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{\beta-1}E_{n,\beta}(\lambda x^n) &= \lambda x^{\beta-n-1}E_n(\lambda x^n).\end{aligned}$$

2.2.2 Intégrale fractionnaire

Intégrale de Riemann-Liouville

Fonction définies sur $[a,b]$

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a,b]$.Notons par $\left(I_{\alpha^+}^1 f\right)$ la primitive de f qui s'annule on a:

$$\forall t\in[a,b],\left(I_{a^+}^1 f\right)(t)=\int_a^t f(x)\,dx.$$

L'intégration de $\left(I_{\alpha^+}^1 f\right)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a. De plus,d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\left(I_{a^+}^1 f\right)^2(t) &= \left(I_{a^+}^1 f\right)\circ\left(I_{a^+}^1 f\right)(t)\\ &= \int_a^t\left(\int_a^u f(x)\,dx\right)du\\ &= \int_a^t (t-x)f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, En notant$\left(I_{a^+}^1 f\right)^n$ la n-ième itération de $\left(I_{a^+}^1 f\right)$, une récurrence directe montre que

$$\left(I_{a^+}^1 f\right)^n (t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)\,dx,$$

si on note $g = \left(I_{a^+}^1 f\right)^n$, g est donc l'unique fonction vérifiant ,

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, g^{(k)}(a) = 0, g^{(n)} = f.$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante:

Définition 2.2.4 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, L'intégrale à gauche d'ordre n de f, que l'on note $\left(I_{a^+}^1 f\right)$ est définie par:*

$$\left(I_{a^+}^1 f\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)\,dx.$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment.

C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition de la manière suivante:

Définition 2.2.5 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$, est définie par:*

$$\forall t \in [a,b], \ \left(I_{a^+}^1 f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)\,dx$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$, est définie par:

$$\forall t \in [a,b], \ \left(I_{a^-}^1 f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (t-x)^{\alpha-1} f(x)\,dx.$$

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$

Il est d'étendre la définition aux axes $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$,Notons ces opérateurs $\left(I_{0^+}^\alpha f\right)$ et $\left(I_{+}^\alpha f\right)$:

$$\begin{aligned}\forall t \ &\in \ \mathbb{R}^+, \ \left(I_{0^+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)\,dx.\\ \forall t \ &\in \ \mathbb{R}, \ \left(I_{+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Proposition 2.2.3 *([11],[12])Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a:*

1. $\left(I_{\alpha^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-\alpha)^{\alpha+\beta-1}.$

2. $\left(I_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(t)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-t)^{\alpha+\beta-1}.$

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}
\left(I_{\alpha^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(x-a)^{\beta-1}\,dx, \text{ posons } (x-a)=s(t-a)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 ((t-a)-s(t-a))^{\alpha-1}(s(t-a))^{\beta-1}(t-a)\,ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta),\left(B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

2. Même idée changement de variable est $(b-x)=s(b-t)$.

■

Théorème 2.2.2 *([?], [?])Si $f\in L^1([a,b])$, alors $I_{a^+}^{\alpha}f$ existe pour tout $\alpha>0$, et $I_{a^+}^{\alpha}$ $f\in L^1([a,b])$.*

Proposition 2.2.4 *Soit $\alpha>0,\ \beta>0,$ et $f\in L^1([a,b])$.*

Alors

$$I_{\alpha^+}^{\alpha}I_{a^+}^{\beta}f=I_{a^+}^{\alpha+\beta}f$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
I_{\alpha^{+}}^{\alpha} I_{a^{+}}^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\beta-1} f(s)\, ds \right) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^x (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} f(s)\, ds dx, \quad |\text{changement de l'ordre d'intégration}| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \int_s^t (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1}\, dx ds, \ |x = (t-s)u + s, u : 0 \to 1 \quad u = \frac{x-}{t-} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta)\, ds, (B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}\, ds \\
&= I_{a^{+}}^{\alpha+\beta} f(t).
\end{aligned}
$$

■

Intégrale de Katugampola

Nous présentons une généralisation récente introduite par U dite Katugampola ,qui généralise l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et l'intégrale fractionnaire de Hadamard. l'intégrale est maintenant aussi connue sous le nom d'intégrale fractionnaire de Katugampola et donnée par

Définition 2.2.6 *([9])(**Katugampola**) L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $y \in X_c^p[0,T]$ est définie par:*

$$
\left({}^{\rho} I_{0^{+}}^{\alpha} y\right)(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{s^{\rho-1} y(s)}{(t^{\rho} - s^{\rho})^{1-\alpha}} ds, \quad t \in [0,T].
$$

pour $\rho > 0$ .Cette intégrale est appelée l'intégrale du côté gauche.

Remarque 2.2.2 *Considérons l'espace $X_c^p[0,T]$ $(c \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty)$ des fonctions mesurables y sur $[0,T]$ pour $\| y \|_{X_c^p} < \infty$, ou la norme définie par:*

$$
\| y \|_{X_c^p} = \left(\int_0^T | s^c y(s) |^p \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{p}},
$$

et pour le cas $p = \infty$

$$
\| y \|_{X_c^p} = \textbf{\textit{ess}} \sup_{0 \leq t \leq T} [t^c \mid y(t) \mid].
$$

Théorème 2.2.3 *([9])Soient $\alpha > 0$ et $\rho > 0.t \in [0,T]$ Alors*

1. $\lim_{\rho\to 1}({}^{\rho}I_{0+}^{\alpha}y)(t) = (I_{0+}^{\alpha}y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\,ds,$

2. $\lim_{\rho\to 0}({}^{\rho}I_{0+}^{\alpha}y)(t) = (J_{\alpha^*}^{\alpha}y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{y(s)}{s}ds.$

2.2.3 Dérivées fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaire, on va commencer par introduire les trois plus importantes approches de calcul fractionnaire :au sens de Riemann-Liouville,au sens de Caputo et au sens de Katugampola. On présentera quelques une de leurs propriétés.

Dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha]+1$, Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ I_t^1$, on peut définir une dérivées fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par:

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} = \frac{d}{dt} \circ I_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement,si $\alpha > 0$,et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser:

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} = \frac{d^n}{dt^n} \circ I_t^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 2.2.7 *Soit $\alpha > 0$,et $n = [\alpha] + 1$, la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par:*

$$\begin{aligned}\forall t \in [a,b], D_{a^+}^{\alpha}f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{a^+}^{n-\alpha}f(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

De plus ,on a vu que la définition ,d'intégrale à droit était associée à $-d/dt$. le raisonnement conduit donc à la définition suivante:

Définition 2.2.8 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha]+1$, la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordreα est définie par:*

$$\begin{aligned}\forall t \in [a,b], D_{b^-}^{\alpha} f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{b^-}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)\, dx\end{aligned}$$

Soit maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées de Liouville.

Définition 2.2.9 *Soit $\alpha > 0$,et $n = [\alpha] + 1$.la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordreα est définie par:*

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, D_{+}^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)\, dx\end{aligned}$$

De plus,on a vu que la définition ,d'intégrale à droit était associée à $-d/dt$. le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante:

Définition 2.2.10 *Soit $\alpha > 0$,et $n = [\alpha]+1$.la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordreα est définie par:*

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, D_{-}^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{-}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)\, dx\end{aligned}$$

Remarque 2.2.3 *([13]) Pour $\alpha = 0, n = 1$,on a:*

1. $D_{+}^{\alpha} f(t) = \frac{d}{dt}\left(I_{a^+}^{1} f\right)(t) = f(t)$

2. *Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} D_{a^+}^{\alpha} f(t) = D_{+}^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ D_{b^-}^{\alpha} f(t) = D_{-}^{\alpha} f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}$$

Proposition 2.2.5 *([11],[12]) Pour $\alpha \geqslant 0, \beta > 0$, on a:*

1.
$$\left(D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}$$

2.
$$\left(D_{b^-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(t)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}$$

Remarque 2.2.4 *Pour* $\lambda=\beta-1, a=0$ *on a :*

$$\begin{aligned}\left(D_{0^+}^{\alpha}t^{\lambda}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)\ldots(\lambda+1-\alpha)t^{\lambda-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda))\ldots(1-(\alpha-\lambda))t^{\lambda-\alpha}\end{aligned}$$

$$\left(D_{0^+}^{\alpha}t^{\lambda}\right)(t)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}, si \quad \alpha-\lambda\notin\{1,2,.....,n\}\ \lambda>-1\\ 0, \qquad si \qquad \alpha-\lambda\in\{1,2,.....,n\}\end{cases}$$

Si $\alpha-\lambda\in\{1,2,.....,n\}\Longrightarrow\alpha-\lambda=m\Rightarrow\lambda=\alpha-m, m\in\{1,2,.....,n\}$ *c-à-d*

$$\left(D_{0^+}^{\alpha}t^{\alpha-m}\right)(t)=0, m\in\{1,2,.....,n\}$$

Proposition 2.2.6 *([11],[12])Soit* $\alpha>0,\beta>0,n=[\alpha]+1,$ *on a les propriétés suivantes:*

1. *Si* $f(t)\in L_p([a,b]),(1\leq p<\infty),$ *alors*
$$\left(D_{a^+}^{\alpha}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)=f(t),\ et\ \left(D_{b^-}^{\alpha}I_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)=f(t).$$

2. *Si* $\alpha>\beta,$ *et* $f(t)\in L_p([a,b]),(1\leq p<\infty),$ *alors*
$$\left(D_{a^+}^{\beta}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)=\left(I_{a^+}^{\alpha-\beta}f\right)(t),\ et\ \left(D_{b^-}^{\beta}I_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)=\left(I_{b^-}^{\alpha-\beta}f\right)(t),$$

3. *Si* $f(t)\in C^q([a,b]),q=[\alpha+\beta]+1,$ *alors*
$$\left(D_{a^+}^{\alpha}I_{a^+}^{\beta}f\right)(t)=\left(D_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(t),\ et\ \left(D_{b^-}^{\alpha}I_{b^-}^{\beta}f\right)(t)=\left(D_{b^-}^{\alpha+\beta}f\right)(t),$$

4. *Si* $f(t)\in L_1([a,b]),\left(I_{a^+}^{n-\alpha}f\right)\in AC^n([a,b]),$ *alors*
$$\begin{aligned}\left(I_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(t) &= f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(I_{a^+}^{n-\alpha}f\right)^{(n-K)}(a)}{\Gamma(\alpha-K+1)}(t-a)^{K}\\ \left(I_{b^-}^{\alpha}D_{b^-}^{\alpha}f\right)(t) &= f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-K}\left(I_{b^-}^{n-\alpha}f\right)^{(n-K)}(b)}{\Gamma(\alpha-K+1)}(b-t)^{K}.\end{aligned}$$

2.2.4 Dérivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des composition dans la formule de définition ,semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo.

Définition 2.2.11 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par:*

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], {}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f(t) &= I_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x)\, dx, \end{aligned}$$

Définition aussi son analogue à droit.

Définition 2.2.12 *Soit $\alpha > 0$,et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à droit d'ordre α est définie par:*

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], {}^{C}D_{b^-}^{\alpha} f(t) &= I_{b^-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \\ &= \frac{(-1)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x)\, dx. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.5 *([13]) Par contre ,de telles définition ne recollent pas correctement aux dérivées classique:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \\ {}^{C}D_{b^-}^{\alpha} f(t) = (-1)^n \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)\right) \end{cases}$$

Heureusement ,le résultat suivant montre qu'elle approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Remarque 2.2.6

1. *On note $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$; $f \in AC([a,b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b])$ telle que $f = c + \int_a^x \varphi(t)\, dt$.*

2. *On note $AC^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$,l'espace des fonctions f définies sur $[a,b]$ a valeurs dans C qui ont des dérivées continues sur $[a,b]$ jusqu'a l'ordre $n-1$ donc:$AC^n([a,b]) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{C} : f^{(k)} \in C([a,b]), k = 0...n-1, f^{(n-1)} \in AC([a,b])\right\}$.*

Lemme 2.2.2 *([11],[12]) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+}/\mathbb{N}$,et $n = [\alpha] + 1$.si $f \in AC^{n}([a,b])$, alors presque partout:*

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{\alpha \to n^{-}} \ {}^{C}D_{a^{+}}^{\alpha} f(t) & = & f^{(n)}(t) \\ \lim\limits_{\alpha \to n^{-}} \ {}^{C}D_{a^{+}}^{\alpha} f(t) & = & (-1)^{n} f^{(n)}(t) \end{array}$$

Proposition 2.2.7 *Pour $\alpha \geqslant 0, \beta > 0$,on a:*

1. $$\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \beta > n$$

2. $$\left({}^{C}D_{b^{-}}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, \beta > n$$

Théorème 2.2.4 *Soit $\alpha > 0$,et $n = [\alpha] + 1$, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, possède $(n-1)$ dérivées en (a) et $D_{a^{+}}^{\alpha} f(t)$ existe. Alors*

$$\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\alpha} f\right)(t) = D_{a^{+}}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k} \right]$$

persique pour tout $t \in [a,b]$.

Remarque 2.2.7 *Pour $\lambda = \beta - 1, a = 0$ on a:*

$${}^{C}D_{a^{+}}^{\alpha} t^{\lambda} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}$$

$$\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, si\lambda \notin \{0,1,2,...,n-1\} \\ 0 \qquad\qquad\qquad , si\lambda \in \{0,1,2,...,n-1\} \end{cases} ,\lambda > -1$$

C-à-d

$$\left({}^{C}D_{0}^{\alpha} t^{m}\right)(t) = 0, \quad m \in \{0,1,2,...,n-1\}$$

Proposition 2.2.8 *Soit $\alpha > 0, \beta > 0, n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes:*

1. *Si $f(t) \in C^{q}([a,b])$, $q = [\alpha+\beta] + 1$, alors:*

$$\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\alpha} \ {}^{C}D_{a^{+}}^{\beta} f\right)(t) = \left({}^{C}D_{a^{+}}^{\alpha+\beta} f\right)(t),$$

et

$$\left({}^{C}D_{b^{-}}^{\alpha} \ {}^{C}D_{b^{-}}^{\beta} f\right)(t) = \left({}^{C}D_{b^{-}}^{\alpha+\beta} f\right)(t).$$

2. *Si* $f(t) \in C^m([a,b])$ *,ou* $f(t) \in AC^n([a,b])$ *, alors:*

$$\begin{aligned}
\left(I_{a^+}^{\alpha}\ {}^{C}D_{a^+}^{\beta} f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \\
\left(I_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}D_{b^-}^{\beta} f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.2.1 *Soit* $\alpha \geqslant 0, n = [\alpha]+1$ *et* $\left(D_{a^+}^{\alpha} f\right), \left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f\right)(t)$ *sont existent, on suppose que* $f^{(k)}(a) = 0$ *pour* $k = 0, 1, 2, .., n-1$*. Alors:*

$$\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta} f\right)(t) = \left(D_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(t).$$

2.2.5 Dérivées fractionnaires de Katugampola

Définition 2.2.13 *([10])(**Katugampola fractionnaire dérivés**)*

Soit $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$ *telle que* $\alpha > 0, \rho > 0,$ *et* $n = [\alpha]+1$*. la dérivée fractionnaire de Katugampola ,pour* $0 \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty$*, est définie par:*

$${}^{\rho}D_{0^+}^{\alpha} y(t) = \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \circ \left({}^{\rho}I_{0^+}^{n-\alpha} y\right)(t) = \frac{\rho^{\alpha-n-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t \frac{s^{\rho-1} y(s)}{(t^{\rho}-s^{\rho})^{\alpha-n+1}} ds$$

Remarque 2.2.8 *([9], [10])Un exemple de base ,nous citons pour* $\alpha, \rho > 0,$*et* $\mu > -\rho,$*alors:*

$${}^{\rho}D_{0^+}^{\alpha} t^{\mu} = \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(1+\frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right)} t^{\mu-\alpha\rho}$$

donne en particulier ${}^{\rho}D_{0^+}^{\alpha} t^{\mu(\alpha-m)} = 0,$ *pour tout* $m = 1, 2, ..., n.$

En fait,pour$\alpha, \rho > 0,$*et* $\mu > -\rho,$ *nous avons:*

$$\begin{aligned}
{}^{\rho}D_{0^+}^{\alpha} t^{\mu} &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t s^{\rho+\mu-1}(t^{\rho}-s^{\rho})^{n-\alpha-1} ds \\
&= \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(1+\frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1+n-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right)}\left[n-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right]\left[n-\alpha+\frac{\mu}{\rho}-1\right]...\left[1-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right] t^{\mu-\alpha\rho} \\
&= \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(1+\frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right)} t^{\mu-\alpha\rho}
\end{aligned}$$

Si on met $m = \alpha - \frac{\mu}{\rho}$*, on obtient de :*

${}^{\rho}D_{0^+}^{\alpha}t^{\mu(\alpha-m)} = \rho^{\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha-m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\left(n-m\right)\left(n-m-1\right)...\left(1-m\right)t^{-\rho m}$

Donc ,pour $m = 1, 2, ..., n.$ *nous avons* ${}^{\rho}D_{0^+}^{\alpha}t^{\rho(\alpha-m)} = 0, \forall \alpha, \rho > 0.$

$C\left[0,T\right]$ *désignons l'espace Banach de tout les fonctions continues sur* $\left[0,T\right]$

$$\parallel y \parallel_{\infty} = \sup\left\{\mid y\left(t\right)\mid : 0 \leq t \leq T\right\}.$$

Remarque 2.2.9 *Soit* $p, c.T \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ *tel que* $p \geqslant 1, c > 0,$ *et* $T \leq (pc)^{\frac{1}{pc}}$.

il est clair que , $\forall y \in C\left[0,T\right]$

$$\parallel y \parallel_{X_c^p} = \left(\int_0^T \mid s^c y\left(s\right)\mid^p \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{T^c}{(pc)^{\frac{1}{p}}} \parallel y \parallel_{\infty},$$

et

$$\parallel y \parallel_{X_c^{\infty}} = ess \sup_{0 \leq t \leq T}\left[t^c \mid y\left(t\right)\mid\right] \leq T^c \parallel y \parallel_{\infty},$$

Ce qui implique que $C\left[0,T\right] \rightarrow X_c^p\left[0,T\right],$ *et*

$$\parallel y \parallel_{X_c^p} \leq \parallel y \parallel_{\infty} \text{ pour tous } T \leq (pc)^{\frac{1}{pc}}.$$

Théorème 2.2.5 *([9], [10])Soit* $\alpha, \rho \in \mathbb{R},$ *tels que* $\alpha \in (0,1)\,,$ *et* $\rho > 0,$ *alors pour* $f, g \in X_c^p\left[0,T\right]$ *,où* $1 \leq p \leq \infty,$ *on a:*

Propriété Inverse

$${}^{\rho}D_{0^+}^{\alpha}\ {}^{\rho}I_{0^+}^{\alpha}f\left(t\right) = f\left(t\right)$$

Propriété de linéarité

$$\begin{aligned} {}^{\rho}D_{0^+}^{\alpha}\left(f+g\right)\left(t\right) &= {}^{\rho}D_{0^+}^{\alpha}f\left(t\right) +^{\rho} D_{0^+}^{\alpha}g\left(t\right) \\ {}^{\rho}I_{0^+}^{\alpha}\left(f+g\right)\left(t\right) &= {}^{\rho}I_{0^+}^{\alpha}f\left(t\right) +^{\rho} I_{0^+}^{\alpha}g\left(t\right) \end{aligned}$$

Equation différentielle de type Caputo

On commence par l'équation homogène de type Caputo

Existence de solution [9, bb9]

Lemme 2.2.3 *1. Soit* $r > 0$ *si nous supposons que* $u \in C\left(0,1\right) \cap L\left(0,1\right)$ *Alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo:*

$${}^{c}D^{r}u\left(t\right) = 0, 0 < t < 1$$

Admet une solution unique

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + ... + c_{n-1} t^{n-1}$$

où:

$$C_m \in \mathbb{R} \qquad avec : m = 0, 1, 2, ..., n-1$$

2. *Supposons que* $u \in C^m([0,1])$, *alors:*

$$I^{rc}D^r u(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + ... + c_{n-1} t^{n-1}$$

où:

$$C_m \in \mathbb{R} \qquad avec : m = 0, 1, 2, ..., n-1$$

3. *Soit* $1 < r \leq 2$ *et* $y \in C(0,1)$, *alors l'unique solution du problème au limites*

$$\begin{cases} {}^cD^r u(t) = y(t), 0 < y < 1 \\ u(0) + u'(0) = 0 \\ u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}$$

Est donné par :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds$$

Tel que:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(1-t)(1-s)^{r-1} + (t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} + \frac{(1-t)(1-s)^{r-2}}{\Gamma(r-1)}, 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{(1-t)(1-s)^{r-1} + (t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} + \frac{(1-t)(1-s)^{r-2}}{\Gamma(r-1)}, 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Problème de Cauchy pour les équation différentielles linéaires

Corollaire 2.2.2 1. *Soit* $r = n, n \in \mathbb{N}$ *ou* $r \in \mathbb{C}$ *tel que* $n-1 < r < n$ *et* $g(t) \in L([a,b])$, *si* $a(t) \in L^\infty([a,b])$ *et borné dans* $[a,b]$ *alors le problème de Cauchy pour les équation différentielles linéaires suivant d'ordre* r *et* $b_k \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} D^r y(t) &= a(t)\, y(t) + g(t) \\ D^{r-k}_{+a} y(a+) &= b_k \end{aligned}$$

Admet une unique solution $y(t)$ *dans l'espace* $L^r(a,b)$,

On pratique ,il existe une unique solution $y(t)$ *dans l'espace* $L^r(a,b)$ *pour le problème*

$$\begin{aligned} D^r y(t) &= \lambda (t-a)^{\beta} y(t) + g(t) \\ D_{+a}^{r-k} y(a+) &= b_0 \qquad \lambda, \beta \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

2. *Soit* $r = 1, n \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < r < 1, b_0 \in \mathbb{C}$ *:et* $g(t) \in L([a,b])$, *si* $a(t) \in L^{\infty}([a,b])$ *et borné dans* $[a,b]$ *alors le problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} D^r y(t) &= a(t) y(t) + g(t) \\ D_{+a}^{1-r} y(a+) &= b_0 \end{aligned}$$

Et le problème de Cauchy:

$$\begin{aligned} D^r y(t) &= a(t) y(t) + g(t) \\ \lim_{t \to a} \left[(t-a)^{1-r} y(t) \right] &= c \end{aligned}$$

Admet une unique solution $y(t)$ *dans l'espace* $L^r(a,b)$.

Chapitre 3

Application de la mesure de non compacité sur certain type d'équation différentielle d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre on essaye d'applique la notion de la mesure de non compacité sur les problèmes de type des équations différentielles d'ordre fractionnaires pour étudier l'existence de solutions.

3.1 Application de MNC pour l'existence de solution des EDFs

Cette section est consacré à l'étude de l'existence de la solution des problèmes aux limites.

On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante:2.1.8

1.

$$\begin{cases} {}^{c}D^{r}y\left(t\right)=f\left(t,y\right),\forall t\in I=\left[0,T\right],1<r<2 \\ y\left(0\right)=y_{0},y\left(T\right)=y_{T} \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Où $f:[0,T]\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$; est une fonction continue.

2.

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), t \in [0, T], 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; est une fonction continue et $a; b; c$; sont des constant réelles telle que $a + b \neq 0$:

et ${}^{c}D^{r}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo :

$f : I \times E$ est une fonction donné ,satisfaisant quelques hypothèse qui seront spécifies plus tard et E est un espace de Banach avec la norme $\| \,.\, \|$, cette étude est basé sur les travaux de R.P.Agarwal et la mesure de non compacité est souvent utilisée dans différentes branches d'analyse non linéaire spécialement dans l'existence de solution de différentes types d'équation intégrales, la mesure de non compacité associée au théorème du point fixe de Mönch vont nous permettre d'établir l'existence de solution de problème **??**

3.1.1 Mesure de non-compacité et des équations différentielles fractionnaires dans les espaces de Banach

Dans ce section, nous étudions l'existence et le caractère unique de solutions pour une classe de des équations différentielles fractionnaires non linéaires implicites via l'équation de Banach pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire,

$$\begin{cases} {}^{c}D^{r}y(t) = f(t, y), \text{ pour chaque } t \in J = [0, T], 1 < r < 2 \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \end{cases} \tag{1}$$

où D est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f : J \times E \to E$ est une fonction donnée satisfaisant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard, et E est un espace de Banach de normé $\| \,.\, \|$. Nous utiliserons la technique des mesures de non-compacité qui est souvent utilisée dans plusieurs branches de l'analyse non linéaire. Surtout, cette technique s'avoir être un outil très utile pour plusieurs types d'équations intégrales.

Le but principal ici est de prouver l'existence de solutions pour le problème ci-dessus en utilisant le théorème du point fixe de Mönch et sa mesure de Kuratowski associée de non-compacte.

Lemme 3.1.1 *Nous rappelons quelques définitions et résultats qui seront utilisés dans la suite Notons par $C(J,E)$ l'espace de Banach des fonction continues $y : J \to E$,avec la norme habituelle du supremum*

$$\| y \|_{\infty} = \sup \{\| y(t), t \in J \|\}$$

Soit $L^1(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $y : J \to E$ qui sont intégrables de Bochner,doté de la norme

$$\| y \|_{L^1} = \int_J y(t)\, dt$$

$AC^1(I,\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonction $y : J \to E$ dont les dérivées premières sont absolument continues. De plus,pour un ensemble donné V de fonctions $v : J \to E$, désignons par

$$\begin{aligned} V(t) &= \{v(t) : v \in V\}, t \in J \\ &\quad et \\ V(J) &= \{v(t) : v \in V, t \in J\} \end{aligned}$$

Définition 3.1.1 *La mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné $A \in M_X$,notée $\alpha(A)$,est définie par:* $\alpha(A) = \inf \{\forall \epsilon < 0 : A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i, B_i \subset X, \operatorname{diam}(B_i) < \epsilon, i = 1, 2, ..., n\}$ *désigne le diamètre de l'ensemble B_i.*

Théorème 3.1.1 *:Soit (X,d) un espace métrique et $A, A_1, A_2 \in M_X$, alors*

1. $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \bar{A}$ est compact.

2. $A \subset A_1 \Rightarrow \alpha(A) \leqslant \alpha(A_1)$

3. $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$

4. $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$

5. $\alpha(cB) = \mid c \mid \alpha(B); c \in \mathbb{R}$

6. $\alpha(\operatorname{conv} B) = \alpha(B)$

Définition 3.1.2 *L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction* $h \in L^1([a,b])$ *d'ordre* $r \in \mathbb{R}_+$ *est définie par*

$$I_a^r h(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t \frac{h(s)}{(t-s)^{1-r}} dt$$

oùΓ *est la fonction Gamma quand* $a = 0$ *.on écrit* $I^r h(t) = h(t) * \varphi_r(t)$ *,où* $\varphi_r(t) = \frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)}$ *pour* $t > 0$*.et* $\varphi_r(t) = 0$ *pour* $t \leqslant 0$*. et* $\varphi_r \to \delta(t)$ *comme* $r \to 0$*,où* δ *est la fonction Delta.*

Définition 3.1.3 *Pour une fonction* h *définie sur l'intervalle* $[a,b]$ *, la dérivée d'ordre fractionnaire Caputo de* h *,est définie par*

$$^cD_{a+}^r h(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} \int_a^t \frac{h^{(n)}(s)}{(t-s)^{1-n+r}} ds$$

$n = [r] + 1$ *et*$[r]$ *désinge la partie entière de* r*.*

A partir de la définition de la dérivée de Caputo.

Lemme 3.1.2 *Soit* $r > 0$ *alors :*

i) *L' équation différentielle fractionnaire* $(^cD^r h)(t) = 0$*, admet une solution unique:*

$$h(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_n t^{(n-1)}, \text{ telle que } C_i \in E, \text{ et } i = 0,1,2,...,n = [r]+1$$

ii) *Si* $^cD^r h \in C(I,E)$*;et* $0 < r < 1$*,alors*

$$I^{r\,c}D^r h(t) = h(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_n t^{(n-1)} \tag{3.4}$$

pour certain constant $C_m \in \mathbb{R}, n = 0,1,2,...,n \qquad n = [r]+1$

Définition 3.1.4 *Une application* $f : J \times E \to E$ *est dite Carathéodory si*

i) $t \to f(t,u)$ *est mesurable pour chaque* $u \in E$*.*

ii) $u \to F(t,u)$ *est continue pour presque tout* $t \in J$*.*

Théorème 3.1.2 *Soit* D *un sous-ensemble borné, fermé et convexe d'un espace de Banach telle que* $0 \in D$ *et soit* N *une application continu de* D *vers lui-même. une application continue de* D *vers lui-même. Si l'implication*

$$V = \overline{\text{conv}} N(V) \quad \text{ou} \quad V = N(V) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(V) = 0$$

est valable pour tout sous-ensemble V *de* S D*,alors* N *a un point fixe.*

Lemme 3.1.3 *Soit D un sous-ensemble borné, fermé et convexe d'un espace de Banach $C(J,E)$, G une fonction continue sur $J \times J$ et f une fonction de $J \times E \to E$ qui satisfait aux condition de Carathéodory, et supposons qu'il existe $p \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ tel que ,pour chaque $t \in J$ et chaque ensemble borné $B \subset E$, on ait*

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha(f(J_{t,h} \times B)) \leq p(T)\,\alpha(B),\, J_{t,h} = [t-h, t[\cap J$$

Si V est un sous-ensemble équicontinu de D, alors

$$\alpha\left(\left\{\int_J G(s,t)\, f(s,y(s))\, ds, y \in V\right\}\right) \leq \int_J \parallel G(t,s) \parallel p(s)\,\alpha(V(s))\, ds$$

Résultat d'existence de solution

La présente étude implique que nous définissions ce que présentons par une solution du problème donné (2.1.1)

Définition 3.1.5 *On dit qu'une fonction $y \in AC^1(I,\mathbb{R})$ est une solution de la PVI ,si y satisfait l'équation ${}^cD^r y(t) = f(t, y(t))$ sur I ,et les conditions $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$.*

Lemme 3.1.4 *Soit $1 < r < 2$, $h : J \to E$ soit continue :On dit d'une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = y_0 + y_1 t + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} h(s)\, ds \tag{2}$$

si et seulement si y est une solution des équations différentielles fractionnaires PVI

$${}^cD^r y(t) = h(t), \quad t \in [0.T] \tag{3}$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \tag{4}$$

Démonstration. Par le lemme( ),nous réduisons (2.1.3)-(2.1.4) à équation intégrale équivalente

$$y(t) = C_0 + u_1 t + I^r h(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} h(s)\, ds + C_0 + C_1 t$$

pour certaines constantes $C_0; C_1 \in E$.

Les conditions donnent(2.1.4),

$$C_0 = y_0; C_1 = y_1$$

On obtient donc (2.1.2).Inversement,si u satisfait l'équation (2.1.2) ,les équations (2.1.3)-(2.1.4) sont vraies. Pour dériver le résultat d'existence pour le problème(2.1.1),donne des conditions appropriées comme suit:

$(\mathbf{H}_1) h : J \times E \to E$ satisfaites la condition de Carathéodory

$(\mathbf{H}_2)$ Il existe $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+) \cap C(J, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\| f(t, y) \| \leq p(t) \| y \|$$

pour $t \in J$ et chaque $y \in E$

$(\mathbf{H}_3)$ Pour chaque $xt \in J$ et chaque ensemble borné $B \subset E$, nous avons.

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha (f (J_{t,h} \times B)) \leq p(t) \alpha(B); J_{t,h} = [t - h, t[\cap J$$

Théorème 3.1.3 *Supposons que(* $\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_3)$ *soient vérifiés. Soit* $p^* = \sup_{t \in J} p(t)$ *.Si*

$$\frac{p^* T^r}{\Gamma(r+1)} < 1 \tag{5}$$

alors la PIV(2.1.1)a au moins une solution.

Démonstration. Convertir le problème(2.1.1)en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $N : C(J, E) \to C(J, E)$ défini par

$$N(y)(t) = y_0 + y_1 x^\rho + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s, y(s)) \, ds$$

Clairement, les point fixe de l'opérateur P sont des solution du problème (2.1.1)

Soit

$$r_0 \geqslant \frac{\| y_0 \| + \| y_1 \| T}{1 - \frac{p^* T^r}{\Gamma(r+1)}} \tag{6}$$

et considérer

$$D_{r_0} = \{ y \in C(J, E) : \| y \|_\infty \leq r_0 \}$$

Clairement, le sous-ensemble D_{r_0}est fermé, borné et convexe. Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du théorème.

La preuve du théorème est donnée en plusieurs étapes:

Etape 1: N est continu. Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $C(J,E)$.

Alors pour chaque $t \in J$,

$$\| \quad \| N(y_n)(t) - N(y)(t) \| \| = \| \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} [f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))] \, ds \| \tag{3.1.1}$$

$$\leq \quad \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} \| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \| \, ds \tag{3.1.2}$$

Puisque f est de type Carathéodory, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,nous avons

$$\| N(y_n) - N(y) \|_\infty \to 0, \text{ comme } n \to \infty$$

Etape 2: N fait correspondre D_{r_0} à lui-même. Pour chaque $y \in D_{r_0}$ par $(\mathbf{H}_2)$ et (2.1.6),on a pour chaque $t \in J$,

$$\| \quad N(y)(t) \| \leq \| y_0 + y_1 t \| + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} \| f(s, u(s)) \| \, ds$$

$$\| \quad N(y)(t) \| \leq \| y_0 \| + \| y_1 \| T + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} p(s) \| y(s) \| \, ds$$

$$\| \quad N(y)(t) \| \leq \| y_0 \| + \| y_1 \| T + \frac{r_0}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} p(s) \, ds$$

$$\| \quad N(y)(t) \| \leq \| y_0 \| + \| y_1 \| T + \frac{r_0 p^* T^r}{\Gamma(r+1)}$$

$$\| \quad N(y)(t) \| \leq r_0$$

Etape 3: $N(D_{r_0})$ est bornée et équicontinue. Par la revendication 2,il est évident que $N(D_{r_0}) \subset C(J,E)$ est borné. Pour l'équicontinuité de $N(D_{r_0})$, soit $t_1; t_2 \in J, t_1 < t_2$ et $y \in D_{r_0}$.

Alors:

$$\| \quad N(y)(t_2) - N(y)(t_1) \| \leq \| y_1 t_2 - y_1 t_1 \| + \frac{1}{\Gamma(r)} \| \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{r-1} f(s, y(s)) - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{x_1} (t_1 - s^\rho)^{r-1} f$$

$$\| \quad N(y)(t_2) - N(y)(t_1) \| \leq \| y_1 \| (t_2 - t_1) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{r-1} - (t_1 - s)^{r-1} \right] \| f(s, y(s)) \| \, ds + \frac{}{\Gamma}$$

$$\| \quad N(y)(t_2) - N(y)(t_1) \| \leq \| u_{y1} \| (t_2 - t_1) + \frac{r_0}{\Gamma(r)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{r-1} - (t_1 - s)^{r-1} \right] p(s) \, ds + \frac{r_0}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^{t_2} ($$

Comme $t_1 \to t_2$,le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Maintenant, soit V sous-ensemble de D_{r_0} tel que $V \subset \overline{\text{conv}}\left(N\left(V\right) \cap \{0\}\right)$.D'après la revendication 3, le sous-ensemble ϖ est borné et équicontinu et donc la fonction $v \to v\left(t\right) = \alpha\left(V\left(t\right)\right)$ est continue sur J.

Puisque la fonction $t \to y_0 + y_1 t$ est continue sur J,l'ensemble $\overline{\{y_0 + y_1 t; t \in J\}} \subset E$ est compact. En utilisant ce fait ,($\mathbf{H}_3$) le lemme ()et les propriétés de la mesure α on a pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} v\left(t\right) &\leq \alpha\left(N\left(V\right)\left(t\right) \cup \{0\}\right) \\ &\leq \alpha\left(N\left(V\right)\left(t\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{\Gamma\left(r\right)} \int_0^t \left(t-s\right)^{r-1} p\left(s\right) \alpha\left(V\left(s\right)\right) ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma\left(r\right)} \int_0^t \left(t-s\right)^{r-1} p\left(s\right) v\left(s\right) ds \\ &\leq \parallel v \parallel_\infty \frac{1}{\Gamma\left(r\right)} \int_0^t \left(t-s\right)^{r-1} p\left(s\right) ds \\ &\leq \parallel v \parallel_\infty \frac{p^* T}{\Gamma\left(r+1\right)} \end{aligned}$$

Cela donne ça

$$\parallel v \parallel_\infty \leq \frac{p^* T^r}{\Gamma\left(r+1\right)}$$

Par (), il s'ensuit que $\parallel v \parallel_\infty = 0$, c'est-à-dire $v\left(t\right) = 0$ pour tout $t \in J$,et alors$V\left(t\right)$ est relativement compact dans$E$.

En examen du théorème d'Ascoli-Arzela, V a relativement compact dans D_{r_0}.En appliquant maintenant le théorème(),nous concluons que N a un point fixe qui est une solution du problème ()-()

3.1.2 Existence de Solution de l'équation différentielle Fractionnaire de Type Katugampola

Dans cette section, nous étudions l'existence et le caractère unique de solutions pour une classe de ces équations différentielles fractionnaires non linéaires de Katugampola dérivé fractionnaire avec une condition initiale

$$^{\rho}D_{0+}^{r} u\left(x\right) = f\left(x, u\left(x\right)\right), x > 0, x \in I := \left[0, T\right], 1 < r < 2 \tag{3.2}$$

Avec:

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \tag{3.3}$$

Où $0 < r < 2, \rho > 0$, et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Les arguments se fondent sur le principe de Banach de contraction, le théorème du point fixe de Schauder et alternative de type Leray-Schauder.

Lemme 3.1.5 *Nous rappelons quelques définitions et résultats qui seront utilisés dans la suite Notons par $C(I, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonction continues $u : I \to \mathbb{R}$,avec la norme habituelle du supremum*

$$\| u \|_{\infty} = \sup \{\| u(x), x \in I \|\}$$

Soit $L^1(I, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $u : I \to \mathbb{R}$ qui sont Bonchner intégrables ,avec la norme

$$\| u \|_{L^1} = \int_I u(x)\, ds$$

$C^1(I, \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions $u : I \to \mathbb{R}$ dont les dérivées premières sont absolument continues. De plus,pour un ensemble donné ϖ de fonctions $\varpi : I \to \mathbb{R}$, désignons par

$$\begin{aligned} \varpi(x) &= \{z(x) : z \in \varpi\}, x \in I \\ &\textit{et} \\ \varpi(I) &= \{z(x) : z \in \varpi, x \in I\} \end{aligned}$$

Lemme 3.1.6 *Soit $r, \rho > 0$,si $u \in C[0, T]$, alors :*

i) *L' équation différentielle fractionnaire $\left({}^{\rho}D^{r}_{0^+}y\right)(x) = 0$, admet une solution unique:*

$$u(x) = C_0 + C_1 x^{\rho} + C_2 x^{2\rho} + ... + C_n x^{(n-1)}, \text{ telles que } r > 0, C_m \in \mathbb{R}, \text{et } m = 1, 2, ..., n = [r] + 1$$

ii) *Si ${}^{\rho}D^{r}_{0^+}u \in C(I, E)$ et $0 < r < 1$,alors*

$${}^{\rho}I^{r}_{0^+}{}^{\rho}D^{r}_{0^+}u(x) = u(x) + C_0 + C_1 x^{\rho} + C_2 x^{2\rho} + ... + C_n x^{(n-1)} \tag{3.4}$$

pour certains constants $C_m \in \mathbb{R}, m = 0, 1, 2, ..., n$; $n = [r] + 1$

Définition 3.1.6 *La mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné* $A \in M_X$ *,notée* $\alpha(A)$ *,est définie par:*

$$\alpha(A) = \inf\{\forall\epsilon < 0 : A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i, B_i \subset X, \operatorname{diam}(B_i) < \epsilon, i = 1, 2, ..., n\}$$

où:$\operatorname{diam} B_i$ *désigne le diamètre de l'ensemble* B_i.

Théorème 3.1.4 *:Soient* (X, d) *un espace métrique et* $A, A_{1,} A_2 \in M_X$ *, alors*

1. $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \bar{A}$ est compact.
2. $A \subset A_1 \Rightarrow \alpha(A) \leqslant \alpha(A_1)$
3. $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$
4. $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$
5. $\alpha(cB) = \mid c \mid \alpha(B); c \in \mathbb{R}$
6. $\alpha(\operatorname{conv} B) = \alpha(B)$

Définition 3.1.7 *L'intégrale fractionnaire de Katugampola* ${}^{\rho}D_{0+}^{r}$ *d'order* $r \in \mathbb{C}(\operatorname{Re} r > 0)$ *est définie par*

$$\left({}^{\rho}I_{0+}^{r} f\right)(x) = \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} f(s)\, ds$$

pour $x > 0$ *,si l'intégrale existe.*

Définition 3.1.8 *La dérivée fractionnaire de Katugampola, correspondant à l'intégrale fractionnaire de Katugampola est définie par*

$$\begin{aligned} \left({}^{\rho}D_{0+}^{r} f\right)(x) &= \left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^n \left({}^{\rho}I_{0+}^{r} f\right)(x) \\ &= \frac{\rho^{r-n+1}}{\Gamma(n-r)} \left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} f(s)\, ds \end{aligned}$$

si l'intégrale existe.

Théorème 3.1.5 *Soit* S *un sous-ensemble borné, fermé et convexe d'un espace de Banach telle que* $0 \in S$, *et soit* P *une application continue de* S *dans lui-même. Si l'implication on a*

$$\varpi = \overline{\operatorname{conv}}(\varpi) \qquad ou \;\; \varpi = P(\varpi) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(\varpi) = 0$$

est vérifié pour tout sous-ensemble ϖ *de* S, *alors* P *a un point fixe.*

Définition 3.1.9 *Une application $f : J \times E \to E$ est dite Carathéodory si*

i) $t \to f(t,u)$ *est mesurable pour chaque* $u \in E$.

ii) $u \to F(t,u)$ *est continue pour presque tout* $t \in J$.

Lemme 3.1.7 *([16])Soit S un sous-ensemble borné, fermé et convexe d'un espace de Banach $C(I,\mathbb{R})$. Soient G une fonction continue sur $I \times I$ et f une fonction de $I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait aux conditions de Carathéodory, et supposons qu'il existe $P \in L^1(I,\mathbb{R}_+)$ tel que ,pour chaque $x \in I$ et chaque ensemble borné $B \subset \mathbb{R}$, on ait*

$$\lim_{h\to 0^+} \alpha\left(f\left(I_{t,h} \times B\right)\right) \leq p(x)\,\alpha(B)\,, I_{t,h} = [x-h,t[\cap I$$

Si ϖ un sous-ensemble équicontinu de S, alors

$$\alpha\left(\left\{\int_I G(x,s)\, f(s,u(s))\, ds, u \in \varpi\right\}\right) \leq \int_I \parallel G(x,s) \parallel p(s)\,\alpha(\varpi(s))\, ds$$

Résultat d'existence de solution

Dans cette section on étudié l'existence de la solution du problème (**??**)-(**??**)

Définition 3.1.10 *On dit qu'une fonction $u \in C(I,\mathbb{R})$ est une solution du PVI (**??**)-(**??**),si U satisfait l'équation ${}^{\rho}D^{r}_{0^+}u(x) = f(x,u(x))$ sur I ,et les conditions $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$:*

Lemme 3.1.8 *Soit $1 < \varpi < 2$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue .On dit une fonction u est une solution de l'équation intégrale fractionnaire de Katugampola*

$$u(x) = u_0 + u_1 x^{\rho} + \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x \left(x^{\rho} - s^{\rho}\right)^{r-1} s^{\rho-1} f(s,u(s))\, ds, \tag{3.5}$$

si et seulement si u est une solution de équation différentielle fractionnaire

$${}^{\rho}D^{r}_{0^+}u(x) = f(x,u(x))\,, \quad x \in [0.T] \tag{3.6}$$

où la dérivée de type Katugampola.

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \tag{3.7}$$

Démonstration. Par le lemme(**??**),nous réduisons (**??**)-(**??**) à une équation intégrale équivalente

$$u(x) = u_0 + u_1 x^\rho + ^\rho I_{0^+}^r f(x) = \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} f(s, u(s))\, ds + C_0 + C_1 x^\rho$$

pour certaines constantes $C_0; C_1 \in R$.

Les conditions (**??**) donnent,

$$C_0 = u_0; C_1 = u_1.$$

On obtient donc (**??**).Inversement,si u satisfait l'équation (**??**) ,les équations(**??**)-(**??**) sont vraies. Pour le résultat d'existence pour le problème(**??**)-(**??**),donne des conditions appropriées comme suit:

$(\mathbf{H}_1) f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaites la condition de Carathéodory.

$(\mathbf{H}_2)$ Il existe $P \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \cap C(I, \mathbb{R}_+)$, telle que

$$\| f(x, u) \| \leq q(x) \| u(x) \| .$$

pour $x \in I$ et chaque $u \in R$.

$(\mathbf{H}_3)$ Pour chaque $x \in I$ et chaque ensemble borné $B \subset R$, nous avons.

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha(f(I_{t,h} \times B)) \leq p(x)\, \alpha(B) ; I_{t,h} = [x - h, t[\cap I$$

Théorème 3.1.6 *Supposons que(* $\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_3)$ *soient vérifiés. Soit* $q^* = \sup_{x \in I} q(x)$ *.Si*

$$\frac{q^* T^{\rho r}}{\rho^r \Gamma(r+1)} < 1 \tag{3.8}$$

*alors le PVI (**??**)-(**??**) admet au moins une solution.*

Démonstration. Convertir le problème (**??**)-(**??**) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $P : C(I, R) \to C(I, R)$, défini par

$$P(u)(x) = u_0 + u_1 x^\rho + \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} f(s, u(s))\, ds$$

Clairement, les point fixe de l'opérateur P sont des solution du problème (**??**)-(**??**)

Soit

$$r_0 \geqslant \frac{\| u_0 \| + \| u_1 \| T^\rho}{1 - \frac{q^* T^{\rho r}}{\rho^r \Gamma(r+1)}} \tag{3.9}$$

et considérer

$$S_{r_0} = \{u \in C(I, \mathbb{R}) : \| u \|_\infty \leq r_0\}$$

Clairement, le sous-ensemble S_{r_0}est fermé, borné et convexe. Nous allons montrer que P satisfait les hypothèses du théorème(**??**).

La preuve du théorème est donnée en plusieurs étapes:

Etape 1: P est continu. Soit $\{u_n\}$ une suite telle que $u_n \to u$ dans $C(I, R)$.

Alors pour chaque $x \in I$,

$$\| \quad P(u_n)(x) - P(u)(x) \| = \| \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} [f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))] \| \tag{3.10}$$

$$\leq \quad \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} \| f(s, u_n(s)) - f(s, u(s)) \| \, ds \tag{3.11}$$

Puisque f est de type Carathéodory, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue,nous avons

$$\| P(u_n)(x) - P(u)(x) \|_\infty \to 0, \text{ comme } n \to \infty.$$

Etape 2: P transforme S_{r_0} à lui-même. Pour chaque $u \in S_{r_0}$ par ($\mathbf{H}_2$) et (**??**),on a pour chaque $x \in I$,

$$\| \quad P(u)(x) \| \leq \| u_0 + u_1 x^\rho \| + \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \| \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} f(s, u(s)) \| \, ds$$

$$\| \quad P(u)(x) \| \leq \| u_0 \| + \| u_1 \| T^\rho + \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} q(s) \| u \| \, ds$$

$$\| \quad P(u)(x) \| \leq \| u_0 \| + \| u_1 \| T^\rho + \frac{r_0 \rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} q(s) \, ds$$

$$\| \quad P(u)(x) \| \leq \| u_0 \| + \| u_1 \| T^\rho + \frac{r_0 \rho^{1-r} q^* T^{\rho r}}{\rho^r \Gamma(r+1)}$$

$$\| \quad P(u)(x) \| \leq r_0$$

Etape 3: $P(S_{r_0})$ est bornée et équicontinue. Par 2,il est évident que $P(S_{r_0}) \subset C(I, R)$ est borné. Pour l'équicontinuité de $P(S_{r_0})$, soit $x_1; x_2 \in I, x_1 < x_2$ et $u \in P(S_{r_0})$.

Alors:

$$\| \quad P(u)(x_2) - P(u)(x_1) \| \leq \| u_1 \| (x_2^\rho - x_1^\rho) + \frac{\rho^{r-1}}{\Gamma(r)} \int_0^{x_2} (x_2^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} \| f(s, u(s)) \| \, ds - \frac{\rho^{r-1}}{\Gamma(r)} \int_0^{x_1}$$

$$\| \quad P(u)(x_2) - P(u)(x_1) \| \leq \| u_1 \| (x_2^\rho - x_1^\rho) + \frac{\rho^{r-1}}{\Gamma(r)} \int_0^{x_1} \left[(x_2^\rho - s^\rho)^{r-1} - (x_1^\rho - s^\rho)^{r-1} \right] s^{\rho-1} \| f(s, u(s))$$

$$\| \quad P(u)(x_2) - P(u)(x_1) \| \leq \| u_1 \| (x_2^\rho - x_1^\rho) + \frac{\rho^{r-1}}{\Gamma(r)} \int_0^{x_1} \left[(x_2^\rho - s^\rho)^{r-1} - (x_1^\rho - s^\rho)^{r-1} \right] s^{\rho-1} q(s) \| u(s) \|$$

Donc

$$\| P(u)(x_2) - P(u)(x_1) \| \leq \| u_1 \| (x_2^\rho - x_1^\rho) + \frac{r_0 \rho^{r-1}}{\Gamma(r)} \int_0^{x_1} \left[(x_2^\rho - s^\rho)^{r-1} - (x_1^\rho - s^\rho)^{r-1} \right] s^{\rho-1} q(s)\, ds + \frac{r_0 \rho^{r-1}}{\Gamma(r)} \int$$

Comme $x_1 \to x_2$,le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Maintenant, soit ϖ un sous-ensemble de S_{r_0} tel que $\varpi \subset \overline{\text{conv}}\,(P(\varpi) \cap \{0\})$ .D'après la assertion 3, le sous-ensemble ϖ est borné et équicontinu et donc la fonction $z \to z(x) = \alpha(\varpi(x))$ est continue sur I.

Puisque la fonction $x \to u_0 + u_1 x^\rho$ est continue sur I,l'ensemble $\left\{\overline{U_0 + U_1 x^\rho; x^\rho \in I}\right\} \subset R$ est compact. En utilisant ce fait ,($\mathbf{H}_3$) le lemme (**??**)et les propriétés de la mesure α on a pour chaque $x \in I$,

$$\begin{aligned}
z(x) &\leq \alpha(P(\varpi) \cup \{0\}) \\
&\leq \alpha(P(\varpi)(x)) \\
&\leq \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} q(s)\, \alpha(\varpi(s))\, ds \\
&\leq \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} q(s)\, \varpi(s)\, ds \\
&\leq \| z \|_\infty \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} q(s)\, ds \\
&\leq \| z \|_\infty \frac{q^* T^{r\rho}}{\rho^r \Gamma(r+1)}
\end{aligned}$$

Cela donne

$$\| z \|_\infty \leq \frac{q^* T^{r\rho}}{\rho^r \Gamma(r+1)}$$

Par (**??**), il s'ensuit que $\| z \|_\infty = 0$, c'est-à-dire $z(x) = 0$ pour tout $x \in I$,et alors$\varpi(x)$ est relativement compact dans$\mathbb{R}$.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzela, ϖ est relativement compact dans S_{r_0}.En appliquant maintenant le théorème(**??**),nous concluons que P a un point fixe qui est une solution du problème (**??**)-(**??**)

Exemple 3.1.1 *Nous considérons le problème PVI fractionnelle de Katugampola*

$$\begin{cases} \left({}^\rho D_{0^+}^r u\right)(x) = f(x, u(x)), x \in I := [0,1] \\ u(0) = 0, u'(0) = 1 \end{cases} \tag{3.12}$$

où $\varpi = \frac{3}{2}, \rho = 1$ *et*

$$f(x, u(x)) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{9\sqrt{\pi}}{16}\right) x^{-\frac{1}{4}} \sin x |u|}{64\left(1+\sqrt{x}\right)}, x \in I, u \in \mathbb{R} \\ 0, x = 0, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Clairement, la fonction f *est continue. L'hypothèse* $(\mathbf{H}_2)$ *est satisfaite avec*

$$\| f(x, u(x)) \| \leq \frac{\left(\frac{9\sqrt{\pi}}{16}\right) x^{-\frac{1}{4}} \sin x \mid u \mid}{64\,(1+\sqrt{x})}$$

où $q(x) = \frac{\left(\frac{9\sqrt{\pi}}{16}\right) x^{-\frac{1}{4}} \sin x |u|}{64\left(1+\sqrt{x}\right)}$ *Par conséquent,la condition (**??**) est satisfaite avec*

$$\frac{q^* T^{r\rho}}{\rho^r \Gamma(r+1)} < 0$$

*Par conséquent, le théorème (**??**) implique que le problème (**??**) a au moins une solution définie sur* I.

Conclusion

Le travaille qu'on a fait dans ce mémoire à un résultat très important, c'est l'étude de l'existence de la solution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire dont le problème posé est de type de Cauchy avec deux opérateur de dérivé fractionnaire de Caputo et de Katugampola, en utilisant la théorie de point fixe et les propriétés de la mesure de non compacité de Kuratouskii.

Bibliographie

[1] R.P.Agarwal ,M.Benchohra ,et D. Seba ,on the Application of Measure of Non compactness to the Existence of solution for fractional Differential Equation ,Birkhauser Verlag Basel /Switzerland,vol 55 (2009), 221-230.

[2] R.P. Agarwal ,M.Benchohra,S.Hamani, *Boundary value problems for differentiel inclusions with fractional order,*.Adv.Stud.Contemp.Math, 12 (2) (2008), 181-196.

[3] A. Belarbi, M. Benchohra,A.Ouahab, *Existance results for functional differential equations of fractional order,*.Appl.Anal,.85 (2006), 1459-1470.

[4] M. Benchohra, S. Hamani,S.K.Ntouyas, *Boundary value problems for differential equations with fractional order,*.Surveys Math.Appl,.3 (2008), 1-12.

[5] M. Benchohra,J.Henderson,S.K.Ntouyas, A.Ouahab, *Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay.*J.Math.Anal.Appl.332 (2) (2008), 1340-1350.

[6] M. Benchohra,J.E.Lazreg, *Existence results for non linear implicit fractional differential equations*,Surv.Math.Appl,.9 (2014), 79-92.

[7] J. Banas and M. Mursaleen, *Sequence spaces and measures of non compactness with applications to diferential and integral equations,*.Springer, 2014.

[8] CH. Belabbaci, *Mesure de non compacité et spectre essentiel*, thèse dedoctorat LMD , université Laghouat, 2017.

[9] U.N.Katugampola, *New approach to a generalized fractionnal integral*, Appl.Math.Comput, 218(2011),no.3, 860-865.

[10] U.N.Katugampola, *New approach to a generalized fractionnal derivatives*,Math.Anal.Appl, 6(2014),no.4, 1-15.

[11] A.A.Kilbas,H.H.Sriva stava,J.J.Trulillo,*Theory and Applications of Fractional Dierential Equations*, Elsevier Science B.V.Amsterdam,2006.

[12] A.A.Kilbas,J.J.Trulillo, *Diferential equations of fractional order,methods,results and problems II*, Appl.Anal.81 (2002);435-493.

[13] H.Medjekal, *Existence et Unicité de la Solution d'une équation Différentielle Fractionnaire de Temps infini dans un Espace de Banach*,Thèse Doctorat en sciences,Univ de Annaba ,2015.

[14] M.Nadir, *Cours sur les équations intégrales* ,Université de M'sila, 2016.

[15] M.Nadir, *Généralité sur les équations differentilles ordinaires*, Université de M'sila, 2016.

[16] S.Szufla, *On the application of non-compactness to existence theorems* ,Rend.Sem.Mat.Unive.Padova, 75(1986),1-14.

[17] Y. Arioua, *Introdiction aux calcul fracionnaire et application*, Master EDP et application (M1-semestre 2), 2022.

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا لدراسة القياس الغير المتراص حول المؤثرات الخطية المطبقة على شكل معادلات تفاضلية ذات رتبة ناطقة وذلك عن طريق لإثبات وجود الحلول باستعمال نظرية النقطة الثابتة لمونك مقترنة بقياس كوراتوسكي .

الكلمات المفتاحية : قياس عدم التراص لكراتسكي، النقطة الثابتة، معادلات تفاضلية ذات رتبة كسر ية،

Résumé

Dans ce travail, nous allons traiter la notion de la mesure non compacté appliquée sur les opérateurs linéaires sous forme d'équations différentielles d'ordre fractionnaire de but à prouver l'existence de la solution à l'aide de la théorie du point fixe de Mönch combinée à la mesure de Kuratouskii.

Mots clés : Mesure de non compacité de Kuratouskii, Point fixe, Équations différentielles fractionnaire, Dérivée fractionnaire Caputo.

Abstract

In This Work, we study the notion the measure of noncompactness and we applied to the fractional differential equations on the goal to proof the existence of solution using fixed point theory combined with the Kuratouskii measure of noncompactness

Keywords : Measure of noncompactness of Kuratouskii, Fixed point theorem, fractional differential equations, derivative Caputo.