

Table des matières

1	NOTION SUR LA THEORIE DES OPERATEURS COMPACTS	2
1.1	Rappels	2
1.2	Compacité dans l'espace des fonctions continues	3
1.3	Opérateurs compacts	4
1.4	Opérateurs intégraux	6
1.5	Opérateurs produits	11
2	EQUATIONS INTEGRALES	12
2.1	Introduction à la théorie des équations intégrales	12
2.2	Classification des équations intégrales	15
2.3	Equations à noyau compact	16
3	L'APPLICATION DE LA METHODE DE PERTURBATION HOMO-	
	TOPIQUE POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES	
	NON LINEAIRE	27
3.1	Présentation de la méthode	28
3.2	Application numérique	30
3.3	Conclusion	33

Introduction

Les phénomènes non-linéaires apparaissent dans plusieurs applications de la science physique et dans d'autres domaines scientifiques, tels que la dynamique des fluides, la physique de l'état solide, la physique des plasmas, biomathématique et la cinétique chimique, ces phénomènes peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP) ou par des équations intégrales.

Au cours de ces dernières années, plusieurs travaux ont été développés par A. M. Wazwaz sur [1][2] en utilisant la méthode décompositionnelle modifiée sur nombreux problèmes de la science appliquée.

En 1997 Ji-Huan He a introduit une nouvelle méthode appelée la méthode de perturbation homotopique (HPM), l'application de cette méthode montre leur efficacité sur les problèmes non linéaires par un grand nombre des chercheurs et des ingénieurs.

Dans notre travail on va appliquer la méthode de perturbation homotopique sur un problème d'équations intégrales non-linéaires de deuxième espèce.

Notre mémoire est décomposé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre on présente quelques notions sur la théorie des opérateurs compacts.

Dans le deuxième chapitre on parle sur les équations intégrales et ces classifications.

Dans le troisième chapitre qui présente notre contribution personnelle, on présente la méthode de perturbation homotopique (HPM) et on essaie de l'appliquer sur les problèmes des équations intégrales, et on se terminera par une application sur trois exemples.

Chapitre 1

NOTION SUR LA THEORIE DES OPERATEURS COMPACTS

Dans ce chapitre on donne quelques notions préliminaires sur la théorie des opérateurs compacts, dans les espaces des fonctions continues.

1.1 Rappels

Définition 1.1.1

Soit U un ensemble d'un espace normé X , U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire:

$$\forall V_j \text{ ouvert, } j \in N, \text{ tels que } U \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j, \exists n \in N,$$

$$\text{tel que } U \subset \bigcup_{j=1}^n V_j \text{ .}$$

Définition 1.1.2

Un ensemble U est dit séquentiellement compact si pour toute suite d'éléments dans U contient une sous suite converge vers un élément dans U .

Théorème 1.1.1

Un sous ensemble d'un espace normé est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact.

Définition 1.1.3

Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Théorème 1.1.2

Tout ensemble borné et de dimension finie d'un espace normé est relativement compact.

1.2 Compacité dans l'espace des fonctions continues

Soit G un ensemble, on note par $C(G)$ l'espace des fonctions continues, cet espace est muni de la norme maximum :

$$\|\varphi\|_{\infty} = \max_{x \in G} |\varphi(x)|.$$

Théorème 1.2.1 (*Arzela-Ascoli*)^[4]

Un ensemble $U \subset C(G)$ est relativement compact si et seulement s'il est borné et équicontinu,

C'est-à-dire:

S'il existe une constante M tel que

$$|\varphi(x)| \leq M \text{ pour tout } x \in G \text{ et } \varphi \in U.$$

Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - y| < \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon \text{ pour tout } (x, y) \in G^2 \text{ et pour tout } \varphi \in U.$$

1.3 Opérateurs compacts

Définition 1.3.1

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y ,
on dit que A est un opérateur compact si pour tout ensemble borne G de X alors $A(G)$
est relativement compact dans Y .

Théorème 1.3.1

Un opérateur A de X dans Y est compact si et seulement si pour toute suite
bornée $\{\varphi_n(x)\}$ de X , la suite $\{A\varphi_n(x)\}$ contient une sous suite convergente dans Y .

Théorème 1.3.2

Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Théorème 1.3.3

Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur
compact.

Théorème 1.3.4

Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A
ou B est compact.

Théorème 1.3.5

Soient X un espace normé et Y un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs
compacts de X dans Y , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de X dans Y .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0,$$

alors A est compact.

Théorème 1.3.6

Soit A un opérateur borné de X dans Y à image $A(X)$ de dimension finie, alors A est compact.

Théorème 1.3.7

L'opérateur identique I de X dans X est compact si et seulement si X est de dimension finie.

Théorème 1.3.8

L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.

Démonstration. ■

Soit E un ensemble borné de $C(G)$, ($\|\varphi\| < M$, pour tout $\varphi \in E$), de plus on a

$$|A\varphi(x)| = \left| \int_G K(x, y) \varphi(y) dy \right|$$

$$|A\varphi(x)| \leq M |G| \max_{x, y \in G} |K(x, y)|, \forall x \in G, \forall \varphi \in E,$$

d'où l'ensemble $A(E)$ est borné.

D'autre part, le noyau K est uniformément continu sur le compact $G \times G$, alors pour tout x, y et z de G , on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x - y| < \delta \implies |K(x, z) - K(y, z)| < \frac{\epsilon}{M|G|},$$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \epsilon \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, y \in G \text{ avec } |x - y| < \delta,$$

d'où l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'après le **théorème d'Arzelà-Ascoli**. $A(E)$ est relativement compact.

Alors A est compact.

Théorème 1.3.9

L'opérateur intégral A de $C(\partial G)$ dans $C(\partial G)$ à noyau continu ou à noyau faiblement singulier

est un opérateur compact sur $C(\partial G)$ si ∂G est de classe C^1 .

1.4 Opérateurs intégraux**Théorème 1.4.1**

Soit G un ensemble compact de R^n et soit K une fonction continue de $G \times G$ dans C , alors l'opérateur linéaire défini de $C(G)$ dans $C(G)$ par

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in G,$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu K cet opérateur est borné de norme $\|A\|$ donnée par

$$\|A\| = \max_{x \in G} \int_G |K(x, y)| dy.$$

Une classe particulièrement simple d'opérateurs intégraux est constituée des opérateurs à noyau dits dégénérés, c'est-à-dire de la forme

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(y).$$

Les opérateurs correspondants sont de rang fini.

Proposition 1.4.1

Soit A un opérateur intégral à noyau dégénéré, l'image de A est de dimension finie.

Démonstration. ■

Nous allons montrer que l'image de A est engendrée par les fonctions a_1, \dots, a_n .

Sa dimension est donc majorée par p .

Soit $\varphi \in L^2[a, b]$.

$$T\varphi(x) = \int_a^b \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(y) \varphi(y) dy = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n b_j(y) \varphi(y) \right) dy a_j(x),$$

qui est bien un élément de l'espace vectoriel engendré par $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Ce résultat sera utilisé plus loin pour démontrer la compacité de l'opérateur A .

Proposition 1.4.2

Soit A l'opérateur intégral de noyau K .

Alors l'opérateur adjoint A^* est un opérateur intégral de noyau K^* , avec

$$K^*(t, s) = K(s, t).$$

Démonstration. ■

Il suffit de partir de la définition.

Soit $\varphi, \psi \in L^2([a, b])$.

$$(T\varphi, \psi) = \int_a^b \left(\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \right) \psi(x) dx = \int_{[a, b]^* [a, b]} K(x, y) \varphi(y) \psi(x) dy dx.$$

par le **théorème de Fubini**. En échangeant encore l'ordre d'intégration, il vient

$$(T\varphi, \psi) = \int_a^b \left(\int_a^b K(x, y) \psi(x) dx \right) \varphi(y) dy = (\varphi, T^*\psi).$$

D'après la définition de l'adjoint.

En permutant le nom des variables, on obtient le résultat voulu.

Corollaire 1.4.1

L'opérateur intégral A de noyau K est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau est symétrique

$$K(x, y) = K(y, x) \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Théorème 1.4.2

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans E .

Alors $I - A$ admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

de plus

$$\|(I - A)^{-1}\| = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Démonstration. ■

De la relation $\|A\| < 1$,

on a la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Dans l'espace de Banach $L(E)$, par conséquent la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur linéaire borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

avec la relation

$$\|S\| = (1 - \|A\|)^{-1}$$

de plus S est l'inverse de $(I - A)$.

En effet, utilisons les notations $(A^0 = I, A^k = AA^{k-1})$, on peut voir que

$$S(I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I ,$$

aussi

$$(I - A)S = (I - A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I ,$$

puisque la norme

$$\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Approximations successive

Il est à remarquer que la somme partielle

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^n A^k f .$$

de la série de Neumann vérifie l'équation

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f, \quad \text{pour } n \geq 0,$$

d'où la relation directe entre la série de Neumann et la théorie des approximations successives.

Théorème 1.4.3

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans E alors pour tout $f \in E$ l'approximation successive

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f, \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

avec φ_0 un vecteur arbitraire de E converge vers une solution unique φ de l'équation

$$\varphi - A\varphi = f .$$

Démonstration. ■

Il est aisé de voir que de la relation précédente, on a

$$\varphi_0 = f$$

$$\varphi_1 = A\varphi_0 + f = Af + f$$

$$\varphi_2 = A\varphi_1 + f = A^2f + Af + f$$

— —

— —

— —

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f = A \sum_{k=0}^n A^k f + f = A^{n+1}f + \sum_{k=0}^n A^k f ,$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A^{n+1}f + \sum_{k=0}^n A^k f \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A^k f + \sum_{k=0}^n A^k f \\ &= Sf = (I - A)^{-1}f. \end{aligned}$$

On remarque que l'application de ces résultats d'analyse fonctionnelle aux équations intégrales est évidente.

Corollaire 1.4.2

Soit K un noyau continu, vérifiant la relation

$$\text{MAX}_{x \in G} \int_G |K(x, y)| dy < 1 ,$$

alors pour tout $f \in C(G)$, l'équation intégrale de seconde espèce

$$\varphi(x) - \int_G K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), x \in G,$$

admet une solution unique $\varphi \in C(G)$, de plus l'approximation successive

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_G K(x, y) \varphi_n(y) dy + f(x). \quad n = 0, 1, \dots$$

converge uniformément vers la solution φ pour tout vecteur arbitraire φ_0 de $C(G)$.

1.5 Opérateurs produits

Soient T_1, T_2 deux opérateurs intégraux sur $L_p(E)$ avec les noyaux K_1, K_2 respectivement, l'opérateur produit envoie aussi $L_p(E)$ dans $L_p(E)$, où $(T_1 T_2)\varphi = T_1(T_2\varphi)$.

Si les noyaux K_1, K_2 justifient l'inter-changement de l'ordre d'intégration alors, on peut déduire le noyau K du produit $T_1 T_2$ en fonction de K_1, K_2 .

$$\begin{aligned} T_1 T_2 \varphi(x) &= \int K_1(x, z) T_2 \varphi(z) dz \\ &= \int K_1(x, z) \int K_2(x, z) \varphi(y) dy dz \\ &= \int \varphi(y) dy \int K_1(x, z) K_2(z, y) dz . \end{aligned}$$

D'où l'opérateur $T_1 T_2$ est un opérateur intégral de noyau

$$K(x, y) = \int K_1(x, z) K_2(z, y) dz .$$

Notons que, si on prend $T_1 = T_2 = T$, de noyau $K_1 = K_2 = K$, alors l'opérateur $T_1 T_2 = T^2$

admet le noyau $K_2(x, y)$ donné par

$$K_2(x, y) = \int K(x, z) K(z, y) dz ,$$

par itération le noyau $K_n(x, y)$ de T_n est

$$K_n(x, y) = \int K(x, z) K_{n-1}(z, y) dz .$$

Chapitre 2

EQUATIONS INTEGRALES

Dans ce chapitre, on présente la théorie des équations intégrales à noyau compact , en parlant de la **théorie de Riesz**,et l'alternative de **Fredholm** .

2.1 Introduction à la théorie des équations intégrales

Définition 2.1.1

On appelle équation intégrale toute équation de la forme

$$\int_E K(x, y, \varphi(y)) dy = \lambda \varphi(x) + f(x) , \quad (2.1.1)$$

où E est un espace mesuré, $f(x)$ une fonction mesurable donnée sur E , λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe et $K(x, y, \varphi(y))$ une fonction mesurable $E \times E$ appelée noyau de l'équation intégrale.

φ une fonction inconnue

Définition 2.1.2

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.

Lemme 2.1.1

Soit K une fonction de l'espace $L^2(]a, b[\times]a, b[)$, alors l'opérateur T défini par :

$$T\varphi(x) = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \quad , \quad x \in]a, b[\quad , \quad (2.1.2)$$

est bien défini, en tant qu'opérateur de $L^2(]a, b[)$ dans lui-même.

Démonstration. ■

La linéarité est évidente, seule la continuité (et le fait que $T\varphi$ est un élément de $L^2(]a, b[)$ si $u \in L^2(]a, b[)$, qui en sera une conséquence immédiate) est à démontrer.

Bien entendu, nous voulons majorer

$$\int_a^b (T\varphi(x))^2 dx = \int_a^b \left(\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \right)^2 dx \quad , x \in]a, b[\quad ,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\int_a^b (T\varphi(x))^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x, y)|^2 dy \right) \left(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy \right) dx \leq M^2 \int_a^b |\varphi(y)|^2 dy \quad ,$$

avec $M^2 = \int \int_{]a, b[\times]a, b[} |K(x, y)|^2 dy dx < \infty$, puisque $K \in L^2(]a, b[\times]a, b[)$.

Ce qui prouve que 2.1.2 définit bien un opérateur continu de $L^2(]a, b[)$ dans lui-même, et montre au passage que sa norme est majorée par M .

Lemme 2.1.2

Soit $K \in L^2(]a, b[\times]a, b[)$.

L'opérateur intégral A de noyau K est compact de $L^2(]a, b[)$ dans lui-même.

Démonstration. ■

Nous admettrons qu'il est possible d'approcher le noyau K dans $L^2(]a, b[\times]a, b[)$ par une suite de noyaux $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dégénérés,

notons T_n l'opérateur intégral de noyau K_n .

D'après la proposition 1.4.1, T_n est un opérateur de rang fini.

Montrons que la suite T_n converge vers T .

On a

$$(T_n - T) \varphi(x) = \int_a^b (K_n(x, y) - K(x, y)) \varphi(y) dy \quad ,$$

et

$$\begin{aligned} \| (T_n - T) \varphi \| &= \int_a^b \left(\int_a^b (K_n(x, y) - K(x, y)) \varphi(y) dy \right)^2 dx \\ \| (T_n - T) \varphi \| &\leq \left(\int \int_{]a, b[\times]a, b[} |K_n(x, y) - K(x, y)|^2 dy \right) dx \| \varphi \|^2 \\ \| (T_n - T) \varphi \| &= \| K_n - K \|_{L^2(]a, b[\times]a, b[)} \| \varphi \|^2 \quad . \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0, d'après le choix de K_n , ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.1.1

1. Pour l'étude de cette équation, on se restreint aux espaces $L_p(E)$ avec ($1 \leq p \leq \infty$).
Implicitement, pour les fonctions $f \in L_p(E)$, on cherche les fonctions φ dans $L_p(E)$ vérifie 2.1.1, cela veut dire que dans cette restriction, on utilise uniquement les noyaux $K(x, y)$ pour lesquels $T\varphi$ soit dans $L_p(E)$ lorsque φ l'est.
2. Si on prend

$$K(x, y, \varphi(y)) = K(x, y)\varphi(y) \quad .$$

L'équation intégrale 2.1.1 devient

$$f(x) = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy - \lambda \varphi(x) \quad ,$$

qui est dite une équation intégrale linéaire.

3. Notons que l'équation 2.1.1 peut être écrite sous forme d'opérateur

$$T\varphi = \lambda\varphi + f \quad .$$

Où l'opérateur T s'écrit comme suit :

$$T\varphi(x) = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \quad .$$

4. Le type le plus général d'une équation intégrale linéaire est

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y, \varphi(y)) dy \quad .$$

2.2 Classification des équations intégrales

Les équations intégrales sont classées par leurs caractéristiques selon trois dichotomies :

1. limites d'intégration

Toute équation intégrale à limites constantes est appelée équation de Fredholm

$$\lambda\varphi(x) - \int_a^b K(x, y, \varphi(y)) dy = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad .$$

Si l'un des deux limites d'intégration est variable, l'équation devient une équation de Volterra

$$\lambda\varphi(x) - \int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad .$$

Il est clair que l'équation de Volterra peut être considérée comme une équation de Fredholm où la fonction K vérifie la condition

$$K(x, y) = 0 \quad \text{pour } y > x \quad .$$

Mais il est raisonnable de ranger les équations du type de Volterra en une classe spéciale, car elle possède des propriétés qui n'ont pas lieu pour des équations de Fredholm arbitraires.

2. L'opérateur intégral T

L'équation définit par

$$T\varphi = f \quad ,$$

est dite une équation de première espèce

Si l'équation est définie par

$$\varphi - T\varphi = f \quad .$$

Cette équation est dite une équation de deuxième espèce.

3. Le second membre de l'équation

Si $f = 0$ l'équation est une équation homogène. Sinon cette équation est dite équation non-homogène.

2.3 Equations à noyau compact

Théorème 2.3.1

Le noyau de l'opérateur T donné par

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X \mid T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous espace fermé.

Démonstration. ■

En effet le noyau $\ker T$ d'un opérateur linéaire est un sous espace vectoriel de plus $\varphi_n \in \ker T$ une suite convergente vers la fonction φ alors on a

$$T\varphi_n = 0 \implies T\varphi = 0,$$

d'où $\ker T$ est fermé.

D'autre part toute fonction $\varphi \in \ker T$ satisfait l'équation $A\varphi = \varphi$ d'où la restriction de l'opérateur A à l'ensemble $\ker T$ coïncide avec l'identité, A étant compact de X dans X

il en est de même de $\ker T$ vers $\ker T$ et par conséquent $\ker T$ est de dimension finie.

Théorème 2.3.2

La suite d'ensembles

$$\ker T, \ker T^2, \dots, \ker T^n, \dots$$

est une suite croissante et ne contient qu'un nombre fini d'ensembles distincts.

Autrement dit, il existe un nombre $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{0\} = \ker T^0 \subset \ker T \subset \ker T^2 \dots \ker T^p = \ker T^{p+1} = \dots$$

Le nombre p est appelé le nombre de **Riesz** de l'opérateur compact A pour l'ensemble $\{\ker T^n\}$.

Démonstration. ■

L'inclusion des ensembles est évidente car si on a

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker T^n &\implies T^n \varphi = 0 \\ &\implies T(T^n \varphi) = T^{n+1} \varphi = 0 \\ &\implies \varphi \in \ker T^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où l'inclusion

$$\ker T^n \subset \ker T^{n+1}, \tag{2.3.1}$$

Supposons qu'il n'existe pas un entier p tel que la suite $\ker T^n$ soit stationnaire c'est à dire

$$\ker T^m \neq \ker T^n \quad \text{pour tout } n, m \in \mathbb{N}, \text{ et } n > m,$$

alors il existe $\varphi_n \in \ker T^n$, avec $\|\varphi_n\| = 1$ tel que

$$\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| > 2, \quad \text{pour tout } \varphi_{n-1} \in \ker T^{n-1}.$$

Soit

$$\|A\varphi_n - A\varphi_m\| = \|\varphi_n - T\varphi_n - \varphi_m + T\varphi_m\| > \frac{1}{2}, \text{ pour tout } n > m, \quad (2.3.2)$$

car la suite $(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n) \in \text{Ker}T^{n-1}$, en effet :

$$T^{n-1}(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n) = T^{n-1}\varphi_m - T^n\varphi_m + T^n\varphi_n = 0.$$

Puisque $\varphi_m \in \text{Ker}T^m \subset \text{Ker}T^{n-1} \subset \text{Ker}T^n$, et $\varphi_n \in \text{Ker}T^n$:

La suite $\{\varphi_n\}$ étant bornée, en vertu de la compacité de l'opérateur A , on peut extraire de la suite $\{A\varphi_n\}$ une sous suite convergente, contradiction avec 2.3.2

Il est à remarquer qu'on a montré $\text{Ker}T^{n-1} = \text{Ker}T^n$, il reste à démontrer que $\text{Ker}T^n = \text{Ker}T^{n+1}$

En effet, on a

$$\varphi \in \text{Ker}T^{n+1} \implies T^{n+1}\varphi = T^n(T\varphi) = 0$$

d'où

$$T\varphi \in \text{Ker}T^n = \text{Ker}T^{n+1}$$

cela signifie que

$$T\varphi \in \text{Ker}T^{n-1} \implies T^{n-1}(T\varphi) = T^n\varphi$$

$$\implies \varphi \in \text{Ker}T^n$$

donc

$$\text{Ker}T^{n+1} \subset \text{Ker}T^n$$

L'inclusion inverse est toujours vraie d'après 2.3.1, d'où l'existence d'un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{Ker}T^p = \text{Ker}T^{p+1} = \text{Ker}T^{p+2} = \dots,$$

où l'entier p est donné par

$$p = \min \{k; \text{Ker}T^k = \text{Ker}T^{k+1}\}.$$

Théorème 2.3.3

L'image de l'opérateur T définie par

$$\text{Im}T = T(X) = \{\psi = T\varphi; \varphi \in X\},$$

est un sous espace fermé.

Théorème 2.3.4

La suite d'ensembles

$$\text{Im}T, \text{Im}T^2, \dots, \text{Im}T^n, \dots$$

est une suite décroissante et ne contient qu'un nombre fini d'ensembles distincts. Autrement dit, il existe un nombre $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\dots, \dots = \text{Im}T^{q+1} = \text{Im}T^q \subset \dots, \dots \subset \text{Im}T^2 \subset \text{Im}T \subset \text{Im}T^0 = X.$$

Le nombre q est appelé le nombre de Riesz de l'opérateur compact A pour l'ensemble des images $\{\text{Im}T^n\}$.

Démonstration. ■

L'inclusion des ensembles est évidente car si, on a

$$\psi = T^n \varphi_1 \in \text{Im}T^n \implies \psi \in T^{n-1}(T\varphi) = T^{n-1} \varphi_2 \in \text{Im}T^{n-1},$$

d'où l'inclusion

$$\text{Im}T^n \subset \text{Im}T^{n-1}. \tag{2.3.3}$$

Supposons qu'il n'existe pas un entier p tel que, la suite ImT^n soit stationnaire, c'est à dire :

$$ImT^m \neq ImT^n, \text{ pour tout } m, n \in N, \text{ avec } m > n.$$

Il existe alors un élément $\psi_n \in ImT^n$, avec $\|\psi_n\| = 1$ tel que

$$\|\psi_n - \psi_{n+1}\| > \frac{1}{2}, \text{ pour tout } \psi_{n+1} \in ImT^{n+1}.$$

Soit

$$\|A\psi_n - A\psi_{n+1}\| = \|\psi_n - T\psi_n - \psi_{n+1} + T\psi_{n+1}\| > \frac{1}{2}, \quad \text{pour tout } m > n, \quad (2.3.4)$$

car la suite $(T\psi_n + \psi_{n+1} - T\psi_{n+1}) \in ImT^{n+1}$.

La suite $\{\psi_n\}$ étant bornée, en vertu de la compacité de l'opérateur A , on peut extraire $\{A\psi_n\}$ une sous suite convergente, contradiction avec 2.3.4

Il est à remarquer qu'on a montré que $ImT^{n+1} = ImT^n$, il reste à démontrer que $ImT^{n+1} = ImT^{n+2}$

En effet, on a

$$\psi \in ImT^{n+1} \implies \psi = T^{n+1}\varphi = T(T^n\varphi) \implies T^n\varphi \in ImT^n = ImT^{n+1},$$

cela signifie que

$$T^n\varphi = T^{n+1}\varphi_1 \implies \psi = T(T^n\varphi) = T(T^{n+1}\varphi_1) = T^{n+2}\varphi_1 \in ImT^{n+2}.$$

L'inclusion inverse est toujours vraie d'après 2.3.3 .

D'où l'existence d'un entier

$q \in N$ tel que

$$\dots = ImT^{q+2} = ImT^{q+1} = ImT^q,$$

où l'entier q est donné par

$$q = \min \{k, \quad ImT^k = ImT^{k+1}\}.$$

Lemme 2.3.1

Le nombre de Riesz p pour l'ensemble des noyaux $\{kerT^n\}$ et le nombre de Riesz q pour l'ensemble des images $\{ImT^n\}$ sont égaux

$$p = q = r .$$

Théorème 2.3.5 [5]

Les sous espaces $kerT^r$ et ImT^r sont supplémentaires, autrement dit

$$X = ImT^r \oplus kerT^r .$$

Théorème 2.3.6

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui-même alors l'opérateur $T = I - A$ injectif si et seulement si il est surjectif et par conséquent il est bijectif, de plus l'opérateur inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ défini de X dans X est borné.

Théorème 2.3.7

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui-même, alors pour que l'équation non-homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f , \tag{2.3.5}$$

admet une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0 , \tag{2.3.6}$$

admet la solution triviale $\varphi = 0$.

Démonstration. ■

En effet, si 2.3.5 admet une solution pour tout $f \in X$ on a alors $T\varphi = X$ d'où la surjectivité de T le nombre de Riesz $r = 0$ implique l'injectivité de T c'est à dire l'équation 2.3.6 admet la solution triviale $\varphi = 0$

Réciproquement, si l'équation 2.3.6 admet uniquement la solution triviale $\varphi = 0$, on a alors T injective, T surjective et T bijective d'où l'existence et l'unicité de la solution de l'équation 2.3.5

Théorème 2.3.8

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui-même, alors pour que l'équation homogène

$$\varphi - A\varphi = 0,$$

admet un nombre fini de solutions linéairement indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ alors l'équation non-homogène

$$\varphi - A\varphi = f,$$

admet une solution $\varphi \in X$ de la forme

$$\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \quad ,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont arbitraires et ψ une solution particulière de l'équation non-homogène.

Théorème 2.3.9

Soient $K \in L^2([a, b]^2)$ et $f \in L^2([a, b])$. L'équation de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

admet une solution et une seule dans $L^2([a, b])$ donnée par la formule

$$\varphi(x) - \int_a^b R(x, y, \lambda) \varphi(y) dy = f(x)$$

où la résolvante $R(x, y, \lambda)$ est donnée par la série

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y)$$

telle que $K_{n+1}(x, y)$ est le noyau itéré de $K_{n+1}(x, y)$ à l'ordre n .

Le rayon de convergence $|\lambda|$ de la série vérifie la condition suivante

$$0 < \lambda < \frac{1}{\|K\|_{L^2([a, b]^2)}}.$$

Théorème 2.3.10 (*Alternative de Fredholm*)[5]

On considère les équations intégrales homogènes duales, l'une de l'autres, issues d'un noyau qui sont donc définies par

$$\text{trouver } \varphi \in C[a, b]; \quad \varphi(x) - \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy = 0, \quad (2.3.7)$$

$$\text{trouver } \psi \in C[a, b]; \quad \psi(x) - \int_a^b k(x, y) \psi(y) dy = 0, \quad (2.3.8)$$

On considère pour $f \in C[a, b]$; $g \in C[a, b]$ les équations intégrales avec seconds membres

$$\text{trouver } \varphi \in C[a, b]; \quad \varphi(x) - \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (2.3.9)$$

$$\text{trouver } \psi \in C[a, b]; \quad \psi(x) - \int_a^b k(x, y) \psi(y) dy = g(x), \quad (2.3.10)$$

alors on a l'alternative

- Ou bien les équations 2.3.7 et 2.3.8 n'ont que les solutions triviales $\varphi = 0$, $\psi = 0$ dans ces cas les équations 2.3.9 et 2.3.10 admettent une solution unique $\varphi \in C[a, b]$ et $\psi \in C[a, b]$ pour chaque $f \in C[a, b]$; $g \in C[a, b]$.

- Ou bien les équations 2.3.7 et 2.3.8 ont le même nombre fini m de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations 2.3.9 et 2.3.10 sont résolubles si et seulement si pour toute solution φ de 2.3.7 et toute solution ψ de 2.3.8 on a

$$\int f(x) \psi(x) dx = \int g(x) \varphi(x) dx \quad ,$$

Dans ces conditions, la solution générale de 2.3.9 s'écrit sous la forme

$$\varphi = \varphi + \sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i \quad ,$$

où φ est la solution particulière de 2.3.9 et les $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq m}$ forment une famille libre de solutions de 2.3.7.

Remarque 2.3.1

1. Le théorème (2.3.9) reste vrai pour les équations intégrales de Volterra de deuxième espèce, avec

$$K_{n+1}(x, y) = \int K(x, z) K_n(z, y) dz \quad ,$$

On connaît trivialement que si les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont des solutions de l'équation homogène 2.3.7, il en est également de leur combinaison linéaire.

2. Dans le second cas de l'alternative de Fredholm, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation non homogène 2.3.9 admette une solution φ est que le second membre de cette équation f soit orthogonal à toute solution de l'équation homogène adjointe, c'est-à-dire

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad ,$$

avec

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = 0,$$

Théorème 2.3.11

Soit l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_a^x k(x, y) y(t) dt = f(x), \tag{2.3.11}$$

telles que f, K des fonctions continues, dérivables sur $[a, b]$, $K(x, x) \neq 0$ et

$$\int_a^b \int_a^b k(x, y) dx dt = B^2 < \infty .$$

Alors il existe une solution unique et continue de l'équation (2.3.11).

Définition 2.3.1

L'équation intégrale homogène de Fredholm de seconde espèce

$$\lambda \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy = \mu \varphi(x), \mu = \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

alors les nombres caractéristiques de cette équation sont $(\frac{1}{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$.

Théorème 2.3.12 [5]

Soit l'équation intégrale de Fredholm de première espèce

$$\int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \tag{2.3.12}$$

L'équation (2.3.12), admet une seule solution dans la classe $L^2([a, b])$ si

1. Le noyau $K(x, y)$ est réel symétrique
2. La série $\sum_k \lambda_k^2 f_k^2$ est convergente, telles que λ_k sont les nombres caractéristiques du noyau $K(x, y)$ et

$$f_k = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx,$$

où φ_k sont les fonctions propres de $K(x, y)$ correspondant aux valeurs propres λ_k .

3. Le système de fonctions propres $\{\varphi_k\}_k$ est complet sur $[a, b]$: La solution de l'équation (2.3.12),

s'obtient dans ce cas comme

$$\varphi(x) = \sum_k \lambda_k f_k \varphi_k(x).$$

Chapitre 3

L'APPLICATION DE LA METHODE DE PERTURBATION HOMOTOPIQUE POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES NON LINEAIRE

Dans ce chapitre on va introduit et appliquer la méthode de perturbation homotopique pour la résolution des équations intégrales de deuxième espèce non-linéaires.

Définition 3.0.2

Soit P_n et P_m deux polynomes en x d'ordre n et m respectivement et $n \geq m$, pour un ϵ quelconque nous avons

$$P_n(x) = \epsilon P_m(x).$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, le problème se réduit à:

$$P_n(x) = 0,$$

qui est appelé l'équation réduit ou l'équation non perturbé.

3.1 Présentation de la méthode

Considérons une équation non linéaire sous la forme suivante:

$$Lu + Nu = 0,$$

où L et N sont opérateur linéaire et opérateur non-linéaire, respectivement.

Pour utiliser la perturbation homotopique il est important de construire une homotopie $H(u, p)$,

en règle générale, il est supposée sous la forme suivante:

$$Lu + p(Nu + Nu - Lu) = 0,$$

où L peut être un opérateur linéaire ou un opérateur non linéaire simple.

Les équations intégrales de Fredholm non linéaires sont donnés par

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, y) \{R(u(y)) + N(u(y))\} dy, \quad (3.1.1)$$

et les équations intégrales de Voltra non linéaires sont donnés par

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, y) \{R(u(y)) + N(u(y))\} dy \quad (3.1.2)$$

$u(x)$ est une fonction inconnue qui sera déterminé, $K(x, y)$ est le noyau del'équation intégrale,

$f(x)$ est une fonction analytique,

$R(u)$ et $N(u)$ sont des fonctions linéaires et non linéaires de u , respectivement.

Pour illustrer la méthode de perturbation homotopique (HPM), nous considérons 3.1.1

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, y) \{R(u(y)) + N(u(y))\} dy = 0. \quad (3.1.3)$$

Et on défini l'homotopie $H(u, p)$ suivante:

$$H(u, p) = (1 - p)F(u) + pL(u), \quad (3.1.4)$$

où $F(u)$ est un opérateur intégral avec la solution u_0 connue, qui peut être calculé facilement et $p \in [0, 1]$.

on peut facilement vérifier que:

$$\begin{cases} H(u, 0) = F(u), \text{ lorsque } p = 0 \\ H(u, 1) = L(u), \text{ lorsque } p = 1 \end{cases}$$

lorsque p approche de zero on trouve le problème trivial

$$L(u) = 0$$

et tracer une courbe continue implicitement défini à partir d'un point de départ $H(v_0, 0)$ à une fonction solution $H(U, 1)$.

Le paramètre intégrant p augmente de façon monotone à partir de zéro à l'unité que le problème trivial.

paramètre $p \in [0, 1]$, peut être considéré comme un paramètre expansion.

La méthode de perturbation homotopique (*HPM*) consiste à déterminer la solution sous la forme d'une série développée en p c'est à dire:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots \tag{3.1.5}$$

Lorsque $p \rightarrow 1$, 3.1.5 correspond à 3.1.4 devient la solution approximative de 3.1.3, c'est à dire,

$$U = \lim_{p \rightarrow 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \tag{3.1.6}$$

La série 3.1.6 est convergente pour la plupart des cas, mais aussi le taux de convergence dépend de $L(u)$. Prenant $F(u) = u(x) - f(x)$, et le remplacement de 3.1.5 dans 3.1.4 et en

assimilant les termes de même puissance de p , nous obtenons:

$$\begin{array}{ll} p^0 & u_0(x) - f(x) = 0 \implies u_0 = f(x), \\ p^1 & u_1(x) - \int_0^1 K(x, y) u_0(y) dy = 0 \implies u_1 = \int_0^1 K(x, y) u_0(y) dy = 0 \\ p^2 & u_2(x) - \int_0^1 K(x, y) u_1(y) dy = 0 \implies u_2 = \int_0^1 K(x, y) u_1(y) dy = 0 \\ - & \cdot \\ - & \cdot \end{array}$$

$$p^{k+2} \quad u_{k+2}(x) = -1 + \int_0^1 K(x, y) u_{k+1}(y) dy = 0.$$

3.2 Application numérique

Dans cette section on considère deux exemples de l'équation d'intégrale de Fredholm et un autre de Voltra, ce sont des équations de deuxième espèce non linéaire et applique la méthode précédente pour trouver leurs solutions:

Exemple 3.2.1 [7]

Soit l'équation intégrale de Fredholm non linéaire:

$$u(x) = \sinh(x) - 1 + \int_0^1 (\cosh(y)^2 - u(y)^2) dy, \quad (3.2.1)$$

on définit

$$F(u) = u(x) - \sinh(x),$$

$$L(u) = u(x) - \sinh(x) + 1 - \int_0^1 (\cosh(y)^2 - u(y)^2) dy = 0,$$

En substituant $F(u)$ et $L(u)$ par leurs valeurs dans l'équation 3.1.4, nous obtenons:

$$H(u, p) = (1 - p)(u(x) - \sinh(x)) + p \left(u(x) - \sinh(x) + 1 - \int_0^1 (\cosh(y)^2 - u(y)^2) dy \right)$$

$$H(u, p) = (1 - p)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots - \sinh(x)) + p \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 - \sinh(x) + 1 - \int_0^1 (\cosh(y)^2 - u_0(y)^2 + pu_1(y)^2 + p^2u_2(y)^2 \dots) dy \right).$$

$$p^0 \quad u_0(x) = \sinh(x)$$

$$p^1 \quad u_1(x) = -1 + \int_0^1 (\cosh(y)^2 - u_0(y)^2) dy = 0,$$

$$p^2 \quad u_2(x) = -1 + \int_0^1 (\cosh(y)^2 - u_1(y)^2) dy = 0,$$

- .
- .

$$p^{k+2} \quad u_{k+2}(x) = -1 + \int_0^1 (\cosh(y)^2 - u_{k+1}(y)^2) dy = 0, \text{ tel que } k \geq 0$$

En utilisant 3.1.6 nous trouvons

$$U(x) = u(x) = \lim_{p \rightarrow 1} u = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = \sinh(x).$$

On peut vérifier aisément que $U(x) = \sinh(x)$ est la solution exacte de l'équation 3.2.1.

Exemple 3.2.2

soit l'équation intégrale de Fredholm non linéaire

$$u(x) = \cos x - x + \int_0^1 x (u(y)^2 - \sin(y)^2) dy, \quad (3.2.2)$$

on définit

$$F(u) = u(x) - \cos x,$$

$$L(u) = u(x) - \cos x + x - \int_0^1 x (u(y)^2 - \sin(y)^2) dy = 0,$$

En substituant $F(u)$ et $L(u)$ par leurs valeurs dans l'équation 3.1.4, nous obtenons:

$$H(u, p) = (1 - p)(u(x) - \cos x) + p \left(u(x) - \cos x + x - \int_0^1 x (u(y)^2 - \sin(y)^2) dy = 0 \right)$$

$$H(u, p) = (1 - p)(u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots - \cos x) + p \left(u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots - \cos x + x - \int_0^1 x (u_0(y)^2 + u_1(y)^2 + u_2(y)^2 + \dots - \sin(y)^2) dy \right)$$

$$p^0 \quad u_0(x) = \cos(x)$$

$$p^1 \quad u_1(x) = -x + \int_0^1 x (u_0(y)^2 - \sin(y)^2) dy = 0,$$

- .

- .

- .

$$p^{k+2} \quad u_{k+2}(x) = \int_0^1 x (u_{k+1}(y)^2 - \sin(y)^2) dy = 0,$$

tel que $k \geq 0$. et utilisant 3.1.6 nous trouvons

$$U(x) = u(x) = \lim_{p \rightarrow 1} u = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = \cos(x).$$

On peut vérifier aisément que $U(x) = \cos(x)$ est la solution exacte de l'équation 3.2.2

Exemple 3.2.3

soit l'équation intégrale de Voltra non linéaire

$$u(x) = e^x + \frac{1}{2}x(e^{2x} - 1) - \int_0^x (xu(y)^2) dy, \quad (3.2.3)$$

nous définissons

$$F(u) = u(x) - e^x,$$

$$L(u) = u(x) - e^x - \frac{1}{2}x(e^x - 1) + \int_0^x (xu(y)^2) dy,$$

En substituant $F(u)$ et $L(u)$ par leurs valeurs dans l'équation 3.1.4, nous obtenons:

$$H(u, p) = (1 - p)(u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots - e^x) + p(u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots - e^x - \frac{1}{2}x(e^x - 1) + \int_0^x x(u_0(y)^2 + u_1(y)^2 + u_2(y)^2 + \dots) dy)$$

$$p^0 \quad u_0(x) = e^x,$$

$$p^1 \quad u_1(x) = \frac{1}{2}x(e^x - 1) - \int_0^x (xu_0(y)^2) dy = 0,$$

$$p^{k+2} \quad u_{k+2}(x) = - \int_0^x (xu_{k+1}(y)^2) dy = 0,$$

tel que $k \geq 0$. et utilisant 3.1.6 nous trouvons

$$U(x) = u(x) = \lim_{p \rightarrow 1} u = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = e^x.$$

On peut vérifier aisément que $U(x) = e^x$ est la solution exacte de l'équation 3.2.3

3.3 Conclusion

Dans ce mémoire, on a utilisé la méthode de perturbation homotopique pour trouver la solution de quelque problèmes d'équations intégrales de deuxième type non linéaires.

Les solutions approchées obtenues par la méthode de perturbation homotopique sont comparées aux solutions exactes.

On a constaté que la méthode de perturbation homotopique (HPM) est très efficace de trouver des solutions exactes pour une large classes des problèmes d'équations intégrales.

Bibliographie

- [1] WAZWAZ A.M., 'Appl. Math. Comput.' : 102 (1999) 77.
- [2] WAZWAZ A.M. *A First Course in Integral Equations*, New jersey:World Scientific; 1997
- [3] HE .J.h. *A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for nonlinear problems*, Int. J. Nonlinear mech. (2000); 35(1), 37-43.
- [4] NADIR, M. *Cours d'analyse fonctionnelle*, université de M'sila 2004.
- [5] Corduneanu, C. *Integral Equations and applications*. Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [6] KHIRANI A. *Sur resolution des equations integrales non lineaires type volterra*, Mémoire de MAGISTER université de M'sila 2009.
- [7] He. J. H., 'A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems', Int. J. Non-Linear Mech. 2000;35(1):37-43.
- [8] S. M. Mirzaei, 'Homotopy Perturbation Method for Solving the Second Kind of Non-Linear Integral Equations', International Mathematical Forum, 5, 2010, no. 23, 1149 - 1154.